Úlohy na dynamické programování

1. Základní úlohy

Předvedená úloha: Spočítejte n-tý člen Fibonacciho posloupnosti. To je posloupnost f, pro kterou platí: $f_0 = 0, f_1 = 1$ a $f_i = f_{i-1} + f_{i-2}$ pro každé $i \geq 2$.

Úloha 1.1: Spočítejte n-tý člen posloupnosti dané předpisem: $g_0 = g_1 = g_2 = 1$ a $g_i = g_{i-1} + 3g_{i-2} - g_{i-3}$ pro každé $i \geq 3$.

Úloha 1.2: Spočítejte n-tý člen posloupnosti dané předpisem: $h_0 = h_1 = 1$ a $h_i = h_0 + h_1 + h_2 + \cdots + h_{i-2}$ pro každé $i \geq 2$.

Úloha 1.3: Máme tabulku čokolády velikosti $1 \times N$. Některé dílky ovšem mají melounovou příchuť. Rádi bychom z čokolády vylámali co nejvíce kousků délky přesně k tak, aby v každém z nich byl nejvýše jeden melounový dílek. Nevadí nám, když na okrajích i mezi kousky budou nějaké nepřidělené dílky.

Úloha 1.4*: Vašek s Filipem se rozhodli, že po úspěšně naprogramované programovací hře svůj výkon oslaví oříškovou čokoládu. Jelikož si ale koupili ne moc dobrou čokoládu z Polska, tak jediné, co je z ní dobré, jsou oříšky. Každý z nich se jich tedy snaží sníst co nejvíce. Čokoládu si můžeme představit jako tabulku $1 \times N$ políček. O každém políčku víme, kolik je v něm oříšků. Filip s Vaškem se střídají v tazích. Začíná Filip. V každém tahu hráč odlomí z pravého konce čokolády $1, 2$ nebo 3 dílky čokolády (kdyby jich bylo více, tak bude považován za nenažrance). Kolik získá Filip oříšků za předpokladu, že oba hrají optimálně?

2. Vícestavová dynamika

Předvedená úloha: Ve třídě je v řadě N židlí. Na některých židlích sedí MatFyzáci. Na počítání úložek je nutné je rozdělit do čtveřic. Každá čtveřice musí sedět na čtyřech po sobě jdoucích židlích. Nikomu se ovšem nechce vstávat, a proto se rozhodli, že do třídy raději pozvou nové studenty. Kolik jich nejméně musí pozvat, aby se mohli správně rozdělit?

Úloha 2.1: Máme zahrádku, kterou si můžeme představit jako tabulku $n \times 1$. V každém políčku buď roste nebo neroste tulipán. Vysaďte další tulipány na políčka, kde žádný tulipán zatím neroste, tak, aby každý souvislý úsek tulipánů obsahoval lichý počet tulipánů (aby z něj šla udělat hezká kytice). Počet přidaných tulipánů musí být co nejmenší. Kolik jich bude potřeba?

3. Dvojrozměrná dynamika

Předvedená úloha: V peněžence máme n mincí s hodnotami $a_1, a_2, \ldots, a_n$ a rádi bychom zaplatili za krmení pro hrochy, které stojí x korun. Kolik mincí na to bude nejméně potřeba?

Úloha 3.1: V peněžence máme n mincí s hodnotami $a_1, a_2, \ldots, a_n$ a hmotnostmi $m_1, m_2, \ldots, m_n$. Rádi bychom zaplatili za krmení pro hrochy, které stojí x korun. Nechceme ovšem nosit s sebou těžké mince, proto bychom rádi po zaplacení měli co nejlehčí peněženku, tedy se zbavili mincí v součtu s co největší hmotností.

Úloha 3.2: Jelikož hroši mají stále hlad, tak se musíme do obchodu vydat ještě jednou. Tentokrát jsme si ale uvědomili, že je možné zaplatit i více, než je požadovaná cena (do nějakého maxima Y) a prodavačka nám vrátí nějaké mince zpět. Prodavačka má v pokladně k mincí hodnot $A_1, A_2, \ldots, A_k$ s hmotnostmi $M_1, M_2, \ldots, M_k$. Vždy se nám ovšem také bude snažit vrátit mince s co největší hmotností (těžké mince nikdo nemá rád). Nikdy nám ale nedá minci, kterou jsme platili my. Nemůžeme platit tak, aby nám nebyla schopná vrátit. Jak máme zaplatit, aby výsledná hmotnost naší peněženky byla co nejmenší.

Úloha 3.3*: Karkulka má po vesnici roznést několik červených čepečků. Stojí zde N domů, všechny leží na jedné přímce a jejich pozice známe. Každý dům si objednal několik červených čepečků. Máme zadanou pozici Karkulčina domu, kde Karkulka začíná s přesně tolika čepečky, kolik potřebuje. Může se pohybovat jen doleva a doprava, přičemž každý metr pohybu ji stojí přesně tolik jednotek energie, kolik má ještě nerozdaných čepečků. Když je Karkulka na pozici s domem, může tam vyložit příslušný počet čepečků, jinak čepečky nikam jinam pokládat nemůže. Kudy má jít, aby ji to stálo co nejméně energie a nebolely ji pak nožičky?

4. Jdeme do lesa!

Úloha 4.1: Je dán strom. Kolik nejvíce vrcholů můžeme obarvit na červeno tak, aby žádné dva obarvené vrcholy neměly společnou hranu?

Úloha 4.2*: Právě stojíme ve vrcholu stromu, který obsahuje N vrcholů a $N-1$ hran. V některých vrcholech jsou umístěné bonbóny. Rádi bychom jich nasbírali alespoň K a vrátili se do stejného vrcholu, odkud jsme vyrazili. Bonbónů zvládneme unést libovolné množství a jejich nošení nás nijak neomezuje. Nechceme dělat zbytečně práci navíc. Počet prošlých hran tedy musí být nejmenší možný. Kolik jich budeme muset minimálně projít?

Lehčí varianta: Každý vrchol má nejvýše tři sousedy. Startovní vrchol nejvýše dva.