```
      if Spojeno[W] > Hladina[V] then
        DvojSouvisle := False; { máme most }
    end else { zpětná nebo dopředná hrana }
    if (Hladina[W] < NovaHladina-1) and
       (Hladina[W] < Spojeno[V]) then
      Spojeno[V] := Hladina[W];
  end;
end;

begin
  ...
  for I := 1 to N do
    Hladina[I] := -1;
  DvojSouvisle := True;
  Projdi(1, 0);
  ...
end.
```

Další formou souvislosti je *vrcholová souvislost*. Graf je *vrcholově 2-souvislý*, právě když:

- má alespoň 3 vrcholy,
- je souvislý,
- zůstane souvislý po odebrání libovolného vrcholu.

Artikulace je takový vrchol, který když odebereme, zvýší se počet komponent souvislosti grafu.

Algoritmus pro zjištění vrcholové 2-souvislosti grafu je velmi podobný algoritmu na zjišťování hranové 2-souvislosti. Jen si musíme uvědomit, že odebíráme celý vrchol. Ze stromu procházení do hloubky může odebráním vrcholu vzniknout až několik podstromů, které všechny musí být spojeny zpětnou hranou s hlavním stromem. Proto musí zpětné hrany z podstromu určeného vrcholem v vést až *nad* vrchol v. Speciálně pro kořen nám vychází, že může mít pouze jednoho syna, jinak bychom ho mohli odebrat a vytvořit tak dvě nebo více komponent souvislosti. Algoritmus se od hledání hranové 2-souvislosti liší jedinou změnou ostré nerovnosti na neostrou, sami zkuste najít, které nerovnosti.

Dnešní menu Vám servírovali
Martin Mareš, David Matoušek a Petr Škoda

Tips & Tricks: Z letáků KSP si můžete složit knížečku

Milí řešitelé!

Je tady podzim a s ním druhá série našeho semináře. Tentokrát Vám přišla bez opravené první série. Nicméně dříve, než budete muset tuto druhou sérii odevzdat, dostanete spolu se zadáním třetí série i Vaše opravená řešení série první. Prostě podzim :–)

Pokud chcete posílat svá řešení elektronickou cestou, prosím držte se instrukcí, které můžete najít na *http://ksp.mff.cuni.cz/submit/*. Řešení, která přišla mailem, jsme přijali pouze výjimečně.

Termín odeslání Vašich řešení druhé série jest stanoven na 12. prosince 2005 a naše adresa je stále stejná: **Korespondenční seminář z programování**
KSVI MFF UK
Malostranské náměstí 25
118 00 Praha 1

Aktuální informace o KSP můžete nalézt na stránkách *http://ksp.mff.cuni.cz/*, dotazy organizátorům můžete posílat e-mailem na adresu *ksp@mff.cuni.cz*.

Zadání druhé série osmnáctého ročníku KSP

18-2-1 Potrhlý syslík — 6 bodů

Syslík Potrhlík dostal jednoho dne podle svého soudu přímo úžasný nápad, jak zbohatnout – bude chovat krokodýly a všechna ostatní zvířátka se na ně budou chodit dívat. A protože to byl velký Potrhlík, hned běžel za žabákem Skrblikvákem, který vlastnil nedalekou bažinu, a když doběhl, udýchaně volal: „*Krokoběh!* Půjč mi bažinu, postavíme *krokoběh* a budeme bohatí!“

„Cože, jaký kroko-běh? Ty chceš běhat nebo krokovat? Co to blábolíš za nesmysly? Ty už ses musel úplně zbláznit!“ „Ale nezbláznil, já ti to vysvětlím.“ „Kdepak, s takovým potrhlým syslem se nebudu bavit.“ „Tak se na něco zeptej, ať víš, že jsem se nezbláznil, a já ti to pak vysvětlím.“

Skrblikvák se tedy zahloubal a vymyslel pro Potrhlíka následující zkoušku: Vzal Potrhlíka do zatemněné místnosti, ve které je na podlaze 50 mincí, z toho 18 leží nahoru lícem a zbytek rubem. Potrhlík je má za úkol rozdělit na dvě (ne nutně stejně velké) části tak, aby počet mincí ležících nahoru lícem byl v obou těchto částech stejný.

Potrhlík může kterékoliv mince libovolně otáčet, ale protože je tma a mince staré, nijak nemůže zjistit, které mince leží nahoru lícem a které rubem. Když tedy nějakou minci otáčí, sám neví, jestli bude rubem nebo lícem, ví jenom, že ji otočil. Sám si ale moc neví rady – pomůžete mu?

Vaším úkolem je vymyslet pro Potrhlíka *postup*, který vždy dokáže mince rozdělit na dvě části tak, aby počet mincí ležící lícem vzhůru byl v obou částech stejný. (Pro počet mincí ležících nahoru rubem to už platit nemusí.)

18-2-2 Kvakulátor — 5 bodů

„No, když jsi ty mince tak pěkně rozdělil, nebudeš úplně blázen, Potrhlíku. Co to tedy je ten kroko-běh?“ „Krokoběh je přece **kroko**dýlí výběh! Postavíme ho v bažině a všichni se na něj budou chodit dívat.“ „Hm, špatný nápad to není. Ale budeme na to potřebovat určitě hodně peněz. Musíme koupit krokodýly a krokodýlí žrádlo, musíme výběh postavit, uplatit stavební komisi Bažinové Unie, koupit stánek se zmrzlinou, . . . “

Když si Skrblikvák sepsal, co všechno budou muset s Potrhlíkem zaplatit, zajímala ho celková výše jejich výdajů. Protože ale neměl při ruce svůj kvakulátor, poprosil Vás o něj.

Skrblikvák se snaží zapsat hodnotu zlomku a/b jako desetinné číslo. Zjistil, že někdy může být tento desetinný zápis nekonečný ($1/3 = 0.3333\ldots$), ale vždy, když se to stane, nějaká část čísla se pak musí opakovat ($1/3 = 0.\overline{3}$). Tato opakující část čísla se nazývá *perioda*.

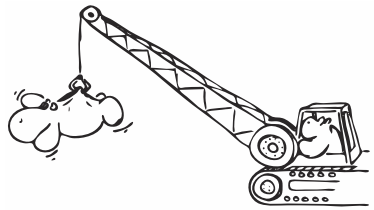
Skrblikvák by po vás chtěl program, který mu pro zadané celočíselná a a b řekne, jak je dlouhá perioda desetinného zápisu čísla a/b. Pokud zápis čísla a/b periodický není, je délka periody evidentně nula. Můžete počítat s tím, že čísla a a b se vejdou do `longintu`.

Příklad: Délka periody čísla 1/3 je jedna, u čísla 1/8 je nula a perioda čísla 123/456 má délku 18.

Bonus: Pokud váš program bude potřebovat jenom konstantně mnoho pomocných proměnných (žádné pole délky závislé na a a b) a nezhorší-li se tím jeho časová složitost, dostanete bonus až +3 body.

18-2-3 Jeřábník Evžen — 15 bodů

Poté, co se Skrblikvák a Potrhlík dohodli, začali hned stavět. „Budeme potřebovat jeřábníka. Nevěděl bys o někom?“ „A co Evžen, ten pelikán? Často stojí v bažině na svých vysokých nohách. Ovládat vysoký jeřáb pro něj bude hračka.“

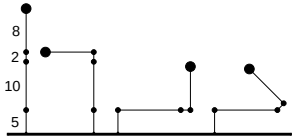


Brzy se ale ukázalo, že demoliční jeřáb je i na vysokého pelikána trochu moc komplikovaný (možná proto, že ovládat páky zobákem nebo volant křídly moc dobře nejde). Protože určitě nechcete, aby Evžen zdemoloval celou bažinu (nebo sebe v kabině), měli byste mu pomoci.

Jeřáb si představte jako N segmentů, každý je libovolné délky. První segment je zapuštěný v zemi a stojí stále vzhůru a mezi každými dvěma sousedními segmenty je ohebný kloub. Na konci posledního segmentu je těžká ocelová koule (je to *demoliční* jeřáb). Na začátku je jeřáb celý vzpřímený. V každém kroku si Evžen vybere nějaký kloub 1 až $N-1$ a ten otočí o zadaný počet stupňů. Zajímá ho, kam přesně se po každém kroku ocelová koule dostane.

Napište program, který dostane N (počet segmentů jeřábu), dále $l_1, \ldots, l_N$ (délky segmentů 1 až N) a M (počet otočení, které Evžen s jeřábem udělá). Následuje M dvojic (k_i, u_i), každá z nich znamená otočit kloub číslo k_i (je mezi segmenty k_i a k_i+1) o u_i stupňů ve směru hodinových ručiček. Navíc *ihned* po načtení každé dvojice (k_i, u_i) musí váš program s přesností na dvě desetinná vypsat, kam se ocelová koule (konec jeřábu) přesune. Na začátku je celý jeřáb vzpřímený a bod $(0,0)$ je spodek jeřábu.

Příklad: Jeřáb má 4 segmenty délky 5, 10, 2 a 8, $M = 3$.



Po provedení operace $(3, -90°)$ se dostane koule na souřadnice $[-8.00; 17.00]$, po $(1, 90°)$ na $[12.00; 13.00]$ a po provedení $(2, -45°)$ na $[5.76; 12.07]$.

18-2-4 Stavbyvedoucí — 9 bodů

Hned, jak byla příslušná část bažiny Evženem zdemolována (ať už podle plánu nebo ne), mohla začít stavba krokoběhu. Stavbyvedoucím se stal Potrhlík a všichni ostatní zvířecí stavitelé si u něj mohli objednávat materiál.

Když si konečně všichni nadiktovali, co chtěli, měl už Potrhlík pěkně dlouhý seznam. U každého předmětu ze seznamu si Potrhlík pamatuje N údajů a každý předmět má zapsaný v seznamu na jedné řádce. Celý seznam je tedy tabulka, která má N sloupců a tolik řádek, kolik je předmětů.

Všichni stavitelé si ovšem (stejně jako učitelé) myslí, že jejich předměty jsou ty nejdůležitější, a tak každý chce, aby byly všechny řádky tabulky setříděny podle jejich požadavku. Každý požadavek je číslo údaje (sloupce), podle kterého by se měly všechny řádky setřídit. (Neboli je to číslo sloupce, podle kterého bychom měli setřídit celou tabulku.)

Chudák Potrhlík nakonec obdržel M požadavků, tedy M žádostí o setřídění dle určitého sloupce. Rozhodl se, že řádky setřídí nejprve podle 1. požadavku, potom podle 2., ..., až M-tého požadavku. Navíc když budou v nějakém kroku dvě řádky podle zpracovávaného požadavku stejné, jejich vzájemné pořadí zůstane stejné jako před tímto tříděním.

Počet třídících požadavků je ale opravdu velký a často se v něm opakují čísla sloupců, takže Potrhlíka napadlo, že byste mu mohli pomoci jeho úkol zjednodušit. Zajímalo by ho, jestli by nemohl provést setřídění řádků podle menšího počtu třídících požadavků. Tato kratší posloupnost třídících požadavků by měla být s původní posloupností *ekvivalentní*, čili ať je seznam předmětů na začátku uspořádán libovolně, setřídění podle původní posloupnosti požadavků a podle kratší posloupnosti požadavků musí dát vždy stejné výsledky (stejně setříděný seznam).

Zkuste napsat program, který dostane N (počet sloupců seznamu), M (počet třídících požadavků) a jednotlivé třídící požadavky a najde nejkratší posloupnost třídících požadavků, která je zadané posloupnosti ekvivalentní. Pokud je minimálních posloupností více, stačí vypsat libovolnou z nich.

Příklad: Pro $N = 3$ a $M = 7$ požadavků 3, 3, 1, 1, 2, 3, 3 je hledaná nejkratší posloupnost požadavků třeba 1, 2, 3.

18-2-5 Krokoběh — 11 bodů

Jakmile byl potřebný materiál nakoupen a staviteli rozebrán (takzvaně rozkraden), mohlo se začít se stavbou krokoběhu. Krokoběh se skládá z několika jezírek, ve kterých mohou krokodýli odpočívat, a kanálů mezi nimi. Kanály jsou obousměrné, vedou vždy mezi dvěma jezírky a žádné dva kanály se mimo jezírka neprotínají (mimoúrovňově ale mohou).

Nějaká jezírka a kanály jsou již postaveny. Pokud se ovšem stane, že se krokodýl nemůže dostat do nějakého jezírka (nevede k němu žádná cesta), je velmi nerudný a žere vše kolem. (*Kvák!*) Protože Potrhlík nechce dopadnout stejně jako Skrblikvák, chtěl by dostavět potřebné kanály tak, aby byli krokodýli spokojení. Ti budou spokojení, pokud i když jeden libovolný kanál vyschne, pořád se budou moci dostat z každého jezírka do kteréhokoliv jiného. A protože stavba krokoběhu Potrhlíka finančně velmi vyčerpala, chtěl by postavit nových kanálů co nejméně.

Váš program dostane na vstupu popis už existujícího krokoběhu. Ten se skládá z $N > 2$ jezírek a M kanálů, každý kanál spojuje dvojici jezírek. Vaším cílem je zjistit, kolik nejméně kanálů je třeba přidat, aby i když libovolný jeden kanál vyschne, bylo pořád možné dostat se z každého jezírka do každého.

Příklad: Pro $N = 6$ jezírek a $M = 4$ kanály vedoucí mezi jezírky $(1,2)$, $(2,3)$, $(3,1)$ a $(4,5)$ je třeba postavit alespoň další 3 kanály. (Jsou to například $(1,4)$, $(5,6)$, $(6,2)$.)

18-2-6 Dominující komplikátory — 10 bodů

V prvním díle seriálu jsme si popsali a vyzkoušeli, jak funguje front-end překladače. Ve zbytku seriálu si budeme povídat o optimalizacích kódu v překladačích a o tom, jak se tyto optimalizace implementují.

První překladače zpracovávaly programy po jednotlivých příkazech. V rámci jednoho příkazu se dají provést pouze jednoduché optimalizace – lze například vyhodnotit aritmetické výrazy s konstantními operandy a zjednodušit je použitím algebraických identit. Produkovaný kód však nebude příliš dobrý, mimo jiné proto, že některé hodnoty (třeba adresy proměnných) budeme zbytečně počítat opakovaně v každém příkazu.

Aby se vyřešil tento problém, začaly se optimalizace provádět nad většími kusy programu. Některé optimalizace lze provádět nad *basic blocky*. Basic block je úsek programu, který se vždy vykonává sekvenčně, tj. neobsahuje skoky, a nedá se skočit do jeho vnitřku, tj. neobsahuje labely. Nad basic blocky se provádí například propagace konstant a kopií a nahrazování společných podvýrazů.

Většina moderních překladačů pracuje převážně nad jednotlivými funkcemi. Na této úrovni lze provádět navíc optimalizace typu mazání výpočtů, jejichž hodnota není použita, odstraňování invariantů ze smyček a mnoho dalších. V posledních 5–10 letech se začaly prakticky používat optimalizace pracující nad celými programy, například změny v rozložení dat v paměti či interprocedurální propagace konstant.

1. Na začátku máme orientovaný graf G a proměnnou $p = 1$.
2. Najdeme takový vrchol v, ze kterého nevede žádná hrana (budeme mu říkat *stok*). Pokud v grafu žádný stok není, výpočet končí, protože jsme našli cyklus.
3. Odebereme z grafu vrchol v a všechny hrany, které do něj vedou.
4. Přiřadíme vrcholu v číslo p.
5. Proměnnou p zvýšíme o 1.
6. Opakujeme kroky 2 až 5, dokud graf obsahuje alespoň jeden vrchol.

Proč tento algoritmus funguje? Pokud v grafu nalezneme stok, můžeme mu určitě přiřadit číslo menší než všem ostatním vrcholům, protože překážet by nám v tom mohly pouze hrany vedoucí ze stoku ven a ty neexistují. Jakmile stok očíslujeme, můžeme jej z grafu odstranit a pokračovat číslováním ostatních vrcholů. Tento postup musí někdy skončit, jelikož v grafu je pouze konečně mnoho vrcholů.

Zbývá si uvědomit, že v neprázdném grafu, který neobsahuje cyklus, vždy existuje alespoň jeden stok: Vezměme libovolný vrchol v_1. Pokud z něj vede nějaká hrana, pokračujme po ní do nějakého vrcholu v_2, z něj do v_3 atd. Co se při tom může stát?

- Dostaneme se do vrcholu v_i, ze kterého nevede žádná hrana. Vyhráli jsme, máme stok.
- Narazíme na v_i, ve kterém jsme už jednou byli. To by ale znamenalo, že graf obsahuje cyklus, což, jak víme, není pravda.
- Budeme objevovat stále a nové a nové vrcholy. V konečném grafu nemožno.

Algoritmus můžeme navíc snadno upravit tak, aby netratil příliš času hledáním vrcholů, z nichž nic nevede – stačí si takové vrcholy pamatovat ve frontě a kdykoliv nějaký takový vrchol odstraňujeme, zkontrolovat si, zda jsme nějakému jinému vrcholu nezrušili poslední hranu, která z něj vedla, a pokud ano, přidat takový vrchol na konec fronty. Celé topologické třídění pak zvládneme v čase $O(N+M)$.

Jiná možnost je prohledat graf do hloubky a všimnout si, že pořadí, ve kterém jsme se z vrcholů vraceli, je právě topologické pořadí. Pokud zrovna opouštíme nějaký vrchol a číslujeme ho dalším číslem v pořadí, rozmysleme si, jaké druhy hran z něj mohou vést: stromová nebo dopředná hrana vede do vrcholu, kterému jsme již přiřadili nižší číslo, zpětná existovat nemůže (v grafu by byl cyklus) a příčné hrany vedou pouze zprava doleva, takže také do již očíslovaných vrcholů. Časová složitost je opět $O(N+M)$.

```
var Ocislovani: array[1..MaxN] of Integer;
    Posledni: Integer;
    I: Integer;

procedure Projdi(V: Integer);
var I: Integer;
begin
  Ocislovani[V] := 0; { zatím V jen označíme }
  for I := Zacatky[V] to Zacatky[V+1]-1 do
    if Ocislovani[Sousedi[I]] = -1 then
      Projdi(Sousedi[I]);
  Inc(Posledni);
  Ocislovani[V] := Posledni;
end;

begin
  ...
  for I := 1 to N do
    Ocislovani[I] := -1;
  Posledni := 0;
  for I := 1 to N do
    if Ocislovani[I] = -1 then Projdi(I);
  ...
end.
```

Hranová a vrcholová 2-souvislost

Nyní se podíváme na trochu komplikovanější formu souvislosti. Říkáme, že neorientovaný graf je *hranově 2-souvislý*, když platí, že:

- má alespoň 3 vrcholy,
- je souvislý,
- zůstane souvislý po odebrání libovolné hrany.

Hranu, jejíž odebrání by způsobilo zvýšení počtu komponent souvislosti grafu, nazýváme *most*.

Na hledání mostů nám poslouží opět upravené prohledávání do hloubky a DFS strom. Všimněme si, že mostem může být jedině stromová hrana – každá jiná hrana totiž leží na nějaké kružnici. Odebráním mostu se graf rozpadne na část obsahující kořen DFS stromu a podstrom „visící“ pod touto hranou. Jediné, co tomu může zabránit, je existence nějaké další hrany mezi podstromem a hlavní částí, což musí být zpětná hrana, navíc taková, která není jenom stromovou hranou viděnou z druhé strany. Takovým hranám budeme říkat *ryzí zpětné hrany*.

Proto si pro každý vrchol spočítáme hladinu, ve které se nachází (kořen je na hladině 0, jeho synové na hladině 1, jejich synové 2, ...). Dále si pro každý vrchol v spočítáme, do jaké nejvyšší hladiny (s nejmenším číslem) vedou ryzí zpětné hrany z podstromu s kořenem v. To můžeme udělat přímo při procházení do hloubky, protože než se vrátíme z v, projdeme celý podstrom pod v. Pokud všechny zpětné hrany vedou do hladiny stejné nebo větší než té, na které je v, pak odebráním hrany vedoucí do v z jeho otce vzniknou dvě komponenty souvislosti, čili tato hrana je mostem. V opačném případě jsme nalezli kružnici, na níž tato hrana leží, takže to most být nemůže. Výjimku tvoří kořen, který žádného otce nemá a nemusíme se o něj proto starat.

Algoritmus je tedy pouhou modifikací procházení do hloubky a má i stejnou časovou a paměťovou složitost $O(N+M)$. Zde jsou důležité části programu:

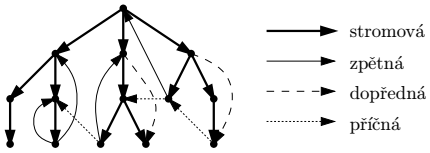
```
var Hladina, Spojeno: array[1..MaxN] of Integer;
    DvojSouvisle: Boolean;
    I: Integer;

procedure Projdi(V, NovaHladina: Integer);
var I, W: Integer;
begin
  Hladina[V] := NovaHladina;
  Spojeno[V] := Hladina[V];

  for I := Zacatky[V] to Zacatky[V+1]-1 do
  begin
    W := Sousedi[I];
    if Hladina[W] = -1 then
    begin { stromová hrana }
      Projdi(W, NovaHladina + 1);
      if Spojeno[W] < Spojeno[V] then
        Spojeno[V] := Spojeno[W];
```

Syny každého vrcholu si uspořádáme v pořadí, v němž jsme je navštívili; tomuto pořadí budeme říkat *zleva doprava* a také ho tak budeme kreslit. Hranám mezi otci a syny budeme říkat *stromové hrany*. Protože jsme do žádného vrcholu nešli dvakrát, budou opravdu tvořit strom. Hrany, které vedou do již navštívených vrcholů na cestě, kterou jsme přišli z kořene, nazveme *zpětné hrany*. *Dopředné hrany* vedou naopak z vrcholu blíže kořeni do už označeného vrcholu dále od kořene. A konečně *příčné hrany* vedou mezi dvěma různými podstromy grafu.

Všimněte si, že při prohledávání neorientovaného grafu objevíme každou hranu dvakrát: buďto poprvé jako stromovou a podruhé jako zpětnou, a nebo jednou jako zpětnou a podruhé jako dopřednou. Příčné hrany se objevit nemohou – pokud by příčná hrana vedla doprava, vedla by do dosud neoznačeného vrcholu, takže by se prohledávání vydalo touto hranou a nevznikl by oddělený podstrom; doleva rovněž vést nemůže: představme si stav prohledávání v okamžiku, kdy jsme opouštěli levý vrchol této hrany. Tehdy by naše hrana musela být příčnou vedoucí doprava, ale o té už víme, že neexistuje.

Prohledávání do hloubky lze tedy také využít k nalezení kostry neorientovaného grafu, což je strom, který jsme prošli. Rovnou při tom také zjistíme, zda graf neobsahuje cyklus: to poznáme tak, že nalezneme zpětnou hranu různou od té stromové, po níž jsme do vrcholu přišli.

Pro orientované grafy je situace opět trochu složitější: stromové a dopředné hrany jsou orientované vždy ve stromě shora dolů, zpětné zdola nahoru a příčné hrany mohou existovat, ovšem vždy vedou zprava doleva, čili pouze do podstromů, které jsme již prošli (nahlédneme opět stejně).



Strom prohledávání do hloubky a typy hran

Prohledávání do šířky

Prohledávání do šířky je založené na podobné myšlence jako prohledávání do hloubky, pouze místo zásobníku používá frontu:

1. Na začátku máme ve frontě pouze jeden prvek, a to zadaný vrchol w. Dále si u každého vrcholu x pamatujeme číslo $H[x]$. Všechny vrcholy budou mít na začátku $H[x] = -1$, jen $H[w] = 0$.
2. Odebereme vrchol z fronty, označme ho u.
3. Každý vrchol v, do kterého vede hrana z u a jeho $H[v] = -1$, přidáme do fronty a nastavíme jeho $H[v]$ na $H[u] + 1$.
4. Kroky 2 a 3 opakujeme, dokud není fronta prázdná.

Podobně jako u prohledávání do hloubky jsme se dostali právě do těch vrcholů, do kterých vede cesta z w (a označili jsme je nezápornými čísly). Rovněž je každému vrcholu přiřazeno nezáporné číslo maximálně jednou. To vše se dokazuje podobně, jako jsme dokázali správnost prohledávání do hloubky.

Vrcholy se stejným číslem tvoří ve frontě jeden souvislý celek, protože nejprve odebereme z fronty všechny vrcholy s číslem n, než začneme odebírat vrcholy s číslem $n + 1$. Navíc platí, že $H[v]$ udává délku nejkratší cesty z vrcholu w do v. Že neexistuje kratší cesta, dokážeme sporem: Pokud existuje nějaký vrchol v, pro který $H[v]$ neodpovídá délce nejkratší cesty z w do v, čili vzdálenosti $D[v]$, vybereme si z takových v to, jehož $D[v]$ je nejmenší. Pak nalezneme nejkratší cestu z w do v a její předposlední vrchol z. Vrchol z je bližší než v, takže pro něj už musí být $D[z] = H[z]$. Ovšem když jsme z fronty vrchol z odebírali, museli jsme objevit i jeho souseda v, který ještě nemohl být označený, tudíž jsme mu museli přidělit $H[v] = H[z] + 1 = D[v]$, a to je spor.

Prohledávání do šířky má časovou složitost taktéž lineární s počtem hran a vrcholů. Na každou hranu se také ptáme dvakrát. Fronta má lineární velikost k počtu vrcholů, takže jsme si oproti prohledávání do hloubky nepohoršili a i paměťová složitost je $O(N + M)$. Algoritmus implementujeme nejsnáze cyklem, který bude pracovat s vrcholy v poli představujícím frontu.

```
var Fronta, H: array[1..MaxN] of Integer;
    I, V, Prvni, Posledni: Integer;
    PocatecniVrchol: Integer;
begin
  ...
  for I := 1 to N do H[I] := -1;
  Prvni := 1;
  Posledni := 1;
  Fronta[Prvni] := PocatecniVrchol;
  H[PocatecniVrchol] := 0;

  repeat
    V := Fronta[Prvni];
    for I := Zacatky[V] to Zacatky[V+1]-1 do
      if H[Sousedi[I]] < 0 then begin
        H[Sousedi[I]] := H[V]+1;
        Inc(Posledni);
        Fronta[Posledni] := Sousedi[I];
      end;
    Inc(Prvni);
  until Prvni > Posledni;  { Fronta je prázdná }
  ...
end.
```

Prohledávání do šířky lze také použít na hledání komponent souvislosti a hledání kostry grafu.

Topologické uspořádání

Teď si vysvětlíme, co je *topologické uspořádání* grafu. Máme orientovaný graf G s N vrcholy a chceme očíslovat vrcholy čísly 1 až N tak, aby všechny hrany vedly z vrcholu s větším číslem do vrcholu s menším číslem, tedy aby pro každou hranu $e = (v_i, v_j)$ bylo $i > j$. Představme si to jako srovnání vrcholů grafu na přímku tak, aby „šipky“ vedly pouze zprava doleva.

Nejprve si ukážeme, že pro žádný orientovaný graf, který obsahuje cyklus, nelze takovéto topologické pořadí vytvořit. Označme vrcholy cyklu $v_1, \ldots, v_n$, takže hrana vede z vrcholu v_i do vrcholu v_{i-1}, resp. z v_1 do v_n. Pak vrchol v_2 musí dostat vyšší číslo než vrchol v_1, v_3 než $v_2, \ldots, v_n$ než v_{n-1}. Ale vrchol v_1 musí mít zároveň vyšší číslo než v_n, což nelze splnit.

Cyklus je ovšem to jediné, co muže existenci topologického uspořádání zabránit. Libovolný acyklický graf lze uspořádat následujícím algoritmem:

Jednou ze základních datových struktur pro práci s celou funkcí je *Control Flow Graph* (CFG). CFG je orientovaný graf, jehož vrcholy jsou basic blocky a hrany odpovídají skokům. Z vrcholu tedy většinou vedou jedna nebo dvě hrany (podle toho, zda příslušný basic block končí nepodmíněným nebo podmíněným skokem). Občas se vyskytnou vrcholy s větším počtem výstupních hran, například pokud basic block končí příkazem `case` v Pascalu či `switch` v C. Jeden z vrcholů CFG je počáteční, v jemu odpovídajícím basic blocku začíná vykonávání funkce.

Některé optimalizace jsou přímo manipulace s hranami a vrcholy CFG, například odstraňování nedosažitelného kódu spočívá v odstranění vrcholů, do nichž nevede cesta z počátku. Mnohé další optimalizace používají CFG při analýzách nutných pro jejich provedení.

Úloha

Jednou z vlastností vrcholů CFG, kterou mnohé optimalizace potřebují znát, je *dominance*. Říkáme, že basic block A *dominuje* basic block B, jestliže každá cesta z počátečního vrcholu do B prochází přes A. Speciálně počáteční vrchol dominuje všechny vrcholy CFG. Podívejme se na následující příklad:

```
(BB0)
b := 0;

if y = 5 then
  begin (BB1)
    a := 1;
  end
else
  begin (BB2)
    a := 2;
    b := 6;
  end;

(BB3)
test (b);
b := 8;

if y > 5 then
  begin (BB4)
    a := 3;
  end
else
  begin (BB5)
    a := 4;
  end;

(BB6)
test (a);
test (b);
```

Zde basic block $BB0$ dominuje všechny blocky a $BB3$ dominuje $BB4$, $BB5$ a $BB6$. Ostatní blocky dominují pouze sebe sama. Jedno z použití dominance je toto: Když máme v programu použití proměnné v basic blocku B, je často potřeba zjistit, kde byla do této proměnné přiřazena hodnota. Nejjednodušší případ nastává, když je jen jedno takové přiřazení (v nějakém blocku A) – například pro použití `b` v $BB6$ je toto přiřazení v $BB3$; všimněte si, že přiřazení do `b` v $BB0$ a $BB2$ nás nezajímají, jelikož jejich hodnoty se do $BB6$ nikdy nedostanou. Aby toto mohlo nastat, block A musí dominovat block B. Tato podmínka je nutná, ale ne postačující, například použití `b` v $BB3$ má dvě definice (v $BB0$ a $BB2$), přestože definice v $BB0$ dominuje $BB3$.

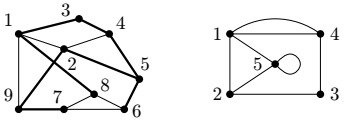
Efektivní algoritmy pro určení dominance jsou ovšem velmi komplikované, proto se jimi nebudeme podrobněji zabývat. Předpokládejte, že už máte nějak relaci dominance pro všechny dvojice vrcholů spočtenu. Vaším úkolem v této úloze je navrhnout datovou strukturu, v níž lze tento výsledek reprezentovat. Chceme, aby tato datová struktura zabírala co nejméně místa, a přitom umožnila rychle pro libovolné dva basic blocky A a B rozhodnout, zda A dominuje B.

Recepty z programátorské kuchařky

V dnešním vydání známého bestselleru budeme péci grafy souvislé i nesouvislé, orientované i neorientované.Řekneme si o základním procházení grafem, komponentách souvislosti, topologickém uspořádání a dalších grafových algoritmech. Abychom ale mohli začít, musíme si nejprve říci, s čím budeme pracovat.

Ingredience

Neorientovaný graf je určen množinou vrcholů V a množinou hran E, což jsou neuspořádané dvojice vrcholů. Hrana $e = \{x, y\}$ spojuje vrcholy x a y. Většinou požadujeme, aby hrany nespojovaly vrchol se sebou samým (takovým hranám říkáme *smyčky*) a aby mezi dvěma vrcholy nevedla více než jedna hrana (pokud toto neplatí, mluvíme o *multigrafech*). Obvykle také předpokládáme, že vrcholů je konečně mnoho. Neorientovaný graf většinou zobrazujeme jako body pospojované čarami.



Neorientovaný graf a multigraf

Podgrafem grafu G rozumíme graf G', který vznikl z grafu G vynecháním některých (a nebo žádných) hran a vrcholů.

Často nás zajímá, zda se dá z vrcholu x dojít po hranách do vrcholu y. Ovšem slovo „dojít“ by mohlo být trochu zavádějící, proto si zavedeme pár pojmů:

- *sled* budeme říkat takové posloupnosti vrcholů a hran tvaru $v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, e_{n-1}, v_n$, že $e_i = \{v_i, v_{i+1}\}$ pro každé i. Sled je tedy nějaká procházka po grafu. Délku sledu měříme počtem hran v této posloupnosti.
- *tah* je sled, ve kterém se neopakují hrany, tedy $e_i \neq e_j$ pro $i \neq j$.
- *cesta* je sled, ve kterém se neopakují vrcholy, čili $v_i \neq v_j$ pro $i \neq j$. Všimněte si, že se nemohou opakovat ani hrany.

Lehce nahlédneme, že pokud existuje sled z vrcholu x do y ($v_1 = x$, $v_n = y$), pak také existuje cesta z vrcholu x do vrcholu y. Každý sled, který není cestou, obsahuje nějaký vrchol u dvakrát, nechť $u = v_i = v_j$, $i < j$. Z takového sledu ale můžeme vypustit posloupnost $e_i, v_{i+1}, \ldots, e_{j-1}, v_j$ a dostaneme také sled spojující v_1 a v_n, který je určitě kratší než původní sled. Tak můžeme po konečném počtu úprav dospět až ke sledu, který neobsahuje žádný vrchol dvakrát, tedy k cestě.

Kružnicí neboli *cyklem* nazýváme cestu délky alespoň 3, ve které oproti definici cesty platí $v_1 = v_n$. Někdy se na cesty, tahy a kružnice v grafu také díváme jako na podgrafy,

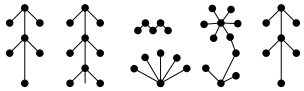
které získáme tak, že z grafu vypustíme všechny ostatní vrcholy a hrany.

Ještě si ukážeme, že pokud existuje cesta z vrcholu a do vrcholu b a z vrcholu b do vrcholu c, pak také existuje cesta z vrcholu a do vrcholu c. To vyplývá z faktu, že existuje sled z vrcholu a do vrcholu c, který můžeme dostat například tak, že spojíme za sebe cesty z a do b a z b do c. A jak jsme si ukázali, když existuje sled z a do c, existuje i cesta z a do c.

V mnoha grafech (například v těch na předchozím obrázku) je každý vrchol dosažitelný cestou z každého. Takovým grafům budeme říkat *souvislé*. Pokud je graf nesouvislý, můžeme ho rozložit na části, které již souvislé jsou a mezi kterými nevedou žádné další hrany. Takové podgrafy nazýváme *komponentami souvislosti*.

Teď se podívejme na pár pojmů z přírody: *Strom* je souvislý graf, který neobsahuje kružnici. *List* je vrchol, ze kterého vede pouze jedna hrana. Ukážeme, že každý strom s alespoň dvěma vrcholy má nejméně dva listy. Proč to? Stačí si najít nejdelší cestu (pokud je takových cest více, zvolíme libovolnou z nich). Oba koncové vrcholy této cesty musí být nutně listy: kdyby z některého z nich vedla hrana, musela by vést do vrcholu, který na cestě ještě neleží (jinak by ve stromu byla kružnice), ale o takovou hranu bychom cestu mohli prodloužit, takže by původní cesta nebyla nejdelší.

Grafům bez kružnic budeme obecně říkat *lesy*, jelikož každá komponenta souvislosti takového grafu je strom.



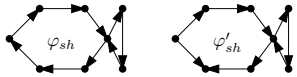
Les, jak ho vidí matematici

Někdy se hodí jeden z vrcholů stromu prohlásit za *kořen*, čímž jsme si v každém vrcholu určili směr nahoru (ke kořeni – je to zvláštní, ale matematici obvykle kreslí stromy kořenem vzhůru) a dolů (od kořene). Souseda vrcholu směrem nahoru pak nazýváme jeho *otcem*, sousedy směrem dolů jeho *syny*.

Kostra souvislého grafu říkáme každému jeho podgrafu, který je stromem a spojuje všechny vrcholy grafu. Můžeme ji například získat tak, že dokud jsou v grafu kružnice, odebíráme hrany ležící na nějaké kružnici. Pro nesouvislé grafy nazveme kostrou les tvořený kostrami jednotlivých komponent. Na prvním obrázku je jedna z koster levého grafu znázorněna silnými hranami.

Orientované grafy

Často potřebujeme, aby hrany byly pouze jednosměrné. Takovému grafu říkáme *orientovaný graf*. Hrany jsou nyní uspořádané dvojice vrcholů (x, y) a říkáme, že hrana vede z vrcholu x do vrcholu y. Hrany (x, y) a (y, x) jsou tedy dvě různé hrany. Orientovaný graf většinou zobrazujeme jako body spojené šipkami. Většina pojmů, které jsme definovali pro neorientované grafy, dává smysl i pro grafy orientované, jen si musíme dát pozor na směr hran.



Silně a slabě souvislý orientovaný graf

Se souvislostí orientovaných grafů je to trochu složitější. Rozlišujeme slabou a silnou souvislost: *slabě souvislý* je graf tehdy, pokud se z něj zapomenutím orientace hran stane souvislý neorientovaný graf. *Silně souvislým* ho nazveme tehdy, vede-li mezi každými dvěma vrcholy x, y orientovaná cesta v obou směrech. Pokud je graf silně souvislý, je i slabě souvislý, ale jak ukazuje náš obrázek, opačně to platit nemusí.

Komponenta silné souvislosti orientovaného grafu G je takový podgraf G', který je silně souvislý a není podgrafem žádného většího silně souvislého podgrafu grafu G. Komponenty silné souvislosti tedy mohou být mezi sebou propojeny, ale žádné dvě nemohou ležet na společném cyklu.

Ohodnocené grafy

Další možností, jak si graf „vyzdobit“, je ohodnotit jeho hrany čísly. Například v grafu silniční sítě (vrcholy jsou města, hrany silnice mezi nimi) je zcela přirozené ohodnotit hrany délkami silnic nebo třeba mýtným vybíraným za průjezd silnicí. Přiřazeným číslům se proto často říká *délky* hran nebo jejich *ceny*. Pojmy, které jsme si před chvílí nadefinovali pro obyčejné grafy, můžeme opět snadno rozšířit pro grafy ohodnocené – např. délku sledu budeme namísto počtu hran sledu počítat jako součet jejich ohodnocení. Neohodnocený graf pak odpovídá grafu, v němž mají všechny hrany jednotkovou délku.

Podobně můžeme přiřazovat ohodnocení i vrcholům, ale raději si všechny operace s ohodnocenými grafy necháme na některé z dalších dílů Kuchařky. I tak budeme mít práce dost a dost.

Reprezentace grafů

Nyní už víme o grafech hodně, ale ještě jsme si neřekli, jak graf reprezentovat v paměti počítače. To můžeme udělat například tak, že vrcholy očíslujeme přirozenými čísly od 1 do N, hrany od 1 do M a odkud kam vedou hrany, popíšeme jedním z následujících tří způsobů:

- *matice sousednosti* – to je pole A velikosti $N \times N$. Na pozici $A[i, j]$ uložíme hodnotu 0 nebo 1 podle toho, zda z vrcholu i do vrcholu j vede hrana (1) nebo nevede (0). S maticí sousednosti se zachází velmi snadno, ale má tu nevýhodu, že je vždy kvadraticky velká bez ohledu na to, kolik je hran. Výhodou naopak je, že místo jedniček můžeme ukládat nějaké další informace o hranách, třeba jejich délky. Vpravo od tohoto odstavce najdete matici sousednosti grafu z prvního obrázku.

```
  123456789
1 011000011
2 100110001
3 100100000
4 011010000
5 010101000
6 000010110
7 000001011
8 100001100
9 110000100
```

- *seznam sousedů* je obvykle tvořen dvěma poli: polem sousedů $S[1 \ldots M]$ obsahujícím postupně čísla všech vrcholů, do kterých vede hrana z vrcholu 1, pak z vrcholu 2 atd., a polem začátků $Z[1 \ldots N]$, v němž se pro každý vrchol dozvíme začátek odpovídajícího úseku v poli S. Pokud navíc do $Z[N + 1]$ uložíme $M + 1$, bude platit, že sousedé vrcholu i jsou uloženi v $S[Z[i]], \ldots, S[Z[i + 1] - 1]$. Tato reprezentace má tu výhodu, že zabírá pouze prostor $O(N + M)$ a sousedy každého vrcholu máme pěkně pohromadě a nemusíme je hledat. Pro graf z 1. obrázku:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
$S[i]$	2	3	8	9	1	4	5	9	1	4	2	3	5	2	4	6	5	7	8	6	8	9	1	6	7	1	2	7

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$Z[i]$	1	5	9	11	14	17	20	23	26	29

Reprezentace grafu seznamem sousedů

- *půlhranami* – tato reprezentace se používá tehdy, pokud potřebujeme během výpočtu graf složitě upravovat. Je univerzální, ale dost pracná na naprogramování. Spočívá v tom, že si každou hranu uložíme jako dvě půlhrany (začátek a konec hrany), každý vrchol bude obsahovat spojové seznamy přicházejících a odcházejících půlhran a každá půlhrana bude ukazovat na svou druhou polovici.

V následujících receptech budeme vždy používat seznamy sousedů, poli S budeme říkat `Sousedi`, poli Z `Zacatky` a nadeklarujeme si je takto:

```
var N, M: Integer;  { Počet vrcholů a hran }
    Zacatky: array[1..MaxN+1] of Integer;
    Sousedi: array[1..MaxM] of Integer;
```

Prohledávání do hloubky

Naše povídání o grafových algoritmech začneme dvěma základními způsoby procházení grafem. K tomu budeme potřebovat dvě podobné jednoduché datové struktury: *Fronta* je konečná posloupnost prvků, která má označený začátek a konec. Když do ní přidáváme nový prvek, přidáme ho na konec posloupnosti. Když z ní prvek odebíráme, odebereme ten na začátku. Proto se tato struktura anglicky nazývá *first in, first out*, zkráceně *FIFO*. *Zásobník* je také konečná posloupnost prvků se začátkem a koncem, ale prvky přidáváme a odebíráme z konce zásobníku. Anglický název je (překvapivě) *last in, first out*, čili *LIFO*.

Algoritmus prohledávání grafu do hloubky:

1. Na začátku máme v zásobníku pouze vstupní vrchol w. Dále si u každého vrcholu v pamatujeme značku z_v, která říká, zda jsme vrchol již navštívili. Vstupní vrchol je označený, ostatní vrcholy nikoliv.
2. Odebereme vrchol ze zásobníku, nazvěme ho u.
3. Každý neoznačený vrchol, do kterého vede hrana z u, přidáme na zásobník a označíme.
4. Kroky 2 a 3 opakujeme, dokud není zásobník prázdný.

Na konci algoritmu budou označeny všechny vrcholy dosažitelné z vrcholu w, tedy v případě neorientovaného grafu celá komponenta souvislosti obsahující w. To můžeme snadno dokázat sporem: Předpokládáme, že existuje vrchol x, který není označen, ale do kterého vede cesta z w. Pokud je takových vrcholů více, vezmeme si ten nejbližší k w. Označme si y předchůdce vrcholu x na nejkratší cestě z w; y je určitě označený (jinak by x nebyl nejbližší neoznačený). Vrchol y se tedy musel někdy objevit na zásobníku, tím pádem jsme ho také museli ze zásobníku odebrat a v kroku 3 označit všechny jeho sousedy, tedy i vrchol x, což je ovšem spor.

To, že algoritmus někdy skončí, nahlédneme snadno: v kroku 3 na zásobník přidáváme pouze vrcholy, které dosud nejsou označeny, a hned je značíme. Proto se každý vrchol může na zásobníku objevit nejvýše jednou, a jelikož ve 2. kroku pokaždé odebereme jeden vrchol ze zásobníku, musí vrcholy někdy (konkrétně po nejvýše N opakováních cyklu) dojít. Ve 3. kroku probereme každou hranu grafu nejvýše dvakrát (v každém směru jednou). Časová složitost celého algoritmu je tedy lineární v počtu vrcholů N a počtu hran M, tedy $O(N + M)$. Paměťová složitost je stejná, protože si musíme hrany a vrcholy pamatovat.

Prohledávání do hloubky implementujeme nejsnáze rekurzivní funkcí. Jako zásobník v tom případě používáme přímo zásobník programu, kde si program ukládá návratové adresy funkcí. Může to vypadat třeba následovně:

```
var Oznacen: array[1..MaxN] of Boolean;

procedure Projdi(V: Integer);
var I: Integer;
begin
  Oznacen[V] := True;
  for I := Zacatky[V] to Zacatky[V+1]-1 do
    if not Oznacen[Sousedi[I]] then
      Projdi(Sousedi[I]);
end;
```

Rozdělit neorientovaný graf na komponenty souvislosti je pak už jednoduché. Projdeme postupně všechny vrcholy grafu a pokud nejsou v žádné z dosud označených komponent grafu, přidáme novou komponentu tak, že graf z tohoto vrcholu prohledáme do hloubky. Vrcholy značíme přímo číslem komponenty, do které patří. Protože prohledáváme do hloubky několik oddělených částí grafu, každou se složitostí $O(N_i + M_i)$, kde N_i a M_i je počet vrcholů a hran komponenty, vyjde dohromady složitost $O(N + M)$. Nic nového si ukládat nemusíme, a proto je paměťová složitost stále $O(N + M)$.

```
var Komponenta: array[1..MaxN] of Integer;
    NovaKomponenta: Integer;

procedure Projdi(V: Integer);
var I: Integer;
begin
  Komponenta[V] := NovaKomponenta;
  for I := Zacatky[V] to Zacatky[V+1]-1 do
    if Komponenta[Sousedi[I]] = -1 then
      Projdi(Sousedi[I]);
end;

var I: Integer;
begin
  ...
  for I := 1 to N do Komponenta[I] := -1;
  NovaKomponenta := 1;
  for I := 1 to N do
    if Komponenta[I] = -1 then
      begin
        Projdi(I);
        Inc(NovaKomponenta);
      end;
  ...
end.
```

Průběh prohledávání grafu do hloubky můžeme znázornit stromem (říká se mu DFS strom). Z počátečního vrcholu w učiníme kořen. Pak budeme graf procházet do hloubky a vrcholy zakreslovat jako syny vrcholů, ze kterých jsme přišli.