Milí řešitelé a řešitelky!

Zde je třetí série 23. ročníku KSP. Každá série obsahuje 7 úloh, z toho 4 nejlépe vyřešené se započítávají do celkového bodového hodnocení. Nezapomeňte, že k vyřešení některých úloh stačí prostudovat vhodné kuchařky.

Termín odevzdání třetí série je stanoven na pondělí 31. ledna v 8:00 SEČ, což znamená, že papírové řešení byste měli podat na poštu do středy 26. ledna.

Řešení přijímáme elektronicky na stránce *https://ksp.mff.cuni.cz/submit/*. Chcete-li s námi komunikovat bezpečně, můžete si ověřit náš šifrovací certifikát – zde je jeho SHA1 hash: `7F:53:E7:00:60:F2:24:93:8F:52:51:EC:1E:A8:34:54:86:69:32:7D`.

Také nám řešení můžete poslat klasickou poštou na adresu

Korespondenční seminář z programování
KSVI MFF UK
Malostranské náměstí 25
118 00 Praha 1

Na případné dotazy vám rádi odpovíme také na adrese *ksp@mff.cuni.cz* a v diskusním fóru na našem webu.

Třetí série třiadvacátého ročníku KSP

Edsger Dijkstra byl slavný holandský myslitel. Byl to samotářský, konzervativní člověk, kterému se jen velmi těžko určuje obor, jímž se zabýval. Narodil se roku 1930 v Rotterdamu, kde zůstal až do svých vysokoškolských studií teoretické fyziky. Později žil a učil v Eindhovenu, kde se věnoval praktické i teoretické matematice a informatice.

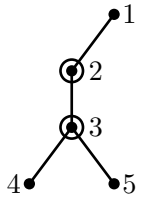
Zabýval se mimo jiné i grafy. Jedním z nejznámějších algoritmů, které vymyslel, je hledání nejkratší cesty v ohodnoceném grafu, jenž po něm nese jméno a můžete si ho přečíst třeba v naší kuchařce.[1] *My bychom po vás teď chtěli vymyslet jeden trochu jednodušší, ale zdánlivě podobný algoritmus.*

23-3-1 Úsporný kořen — 9 bodů

Na vstupu dostanete neohodnocený strom[2] zadaný počtem vrcholů a seznamem hran. Vrchol s hloubkou x bude takový vrchol, od kterého je každý jiný vrchol vzdálený maximálně x. Úsporný kořen je vrchol s nejmenší možnou hloubkou. Nalezněte všechny úsporné kořeny stromu.

Příklad vstupu:

```
5
1 2
2 3
3 4
3 5
```



Výstup: `2 3`

Jako správný samotář bydlel na vesnici, takže do školy jezdil jen v úterý. Vedl tam i seminář, kterému se příhodně říkalo Tuesday Afternoon Club, kde se řešily úlohy podobné těm z KSP. Kdykoliv tam či jinde studenti příliš hlasitě šuškali (to asi dobře znáte), nekřičel, ale naopak začal šeptat. To mělo ohromný efekt – všichni ztichli. Takový měl respekt.

Když se později stěhoval do Ameriky a cesta mu připadala dlouhá, vymyslel úlohu, kterou pak zadal americkým studentům při jejich prvním semináři Tuesday Afternoon Club.

23-3-2 Nejkratší cesta přes oceán — 14 bodů

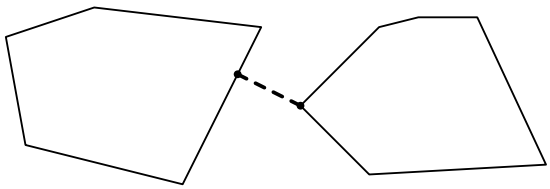
⚠ Pro zjednodušení si severní Ameriku i Evropu představme jako dva konvexní n-úhelníky, které se neprotínají. Chcete nalézt nejkratší cestu mezi nimi. Na vstupu nejdříve dostanete souřadnice Ameriky a potom souřadnice Evropy jako vrcholy v pořadí, v jakém leží na obvodu.

Vaším úkolem je najít takové dva body, jeden na obvodu Ameriky a druhý na obvodu Evropy, aby jejich vzdálenost byla co nejmenší. Pokud je víc možností, stačí vypsat libovolnou z nich.

Vstup (znázorněný obrázkem):

```
5
0 75
10 20
90 0
130 80
45 90

6
185 5
275 10
240 85
210 85
190 80
150 40
```



Výstup (čárkovaně):

```
118 56
150 40
```

Krom tisíce jiných věcí přemýšlel, jak počítače naučit počítat, třeba odpovědět na zadání `1+2*3`. *K tomu účelu znovu objevil postfixový zápis a objevil, jak na něj běžný infixový zápis rychle převést. Pokud to chcete umět taky, můžete se podívat třeba do Wikipedie.*[3]

Abychom nezůstali jen u teorie, podílel se na vývoji programovacího jazyka ALGOL 60 a později i jeho prvního překladače. Tento jazyk vznikl pro snadný zápis algoritmů a jako konkurence tehdy mohutně nasazovaného BASICu.

Edsger Dijkstra vůbec velmi brojil proti příkazu `goto` *a zasazoval se o strukturované programování. Příkaz* `goto` *po-*

[1] `http://ksp.mff.cuni.cz/tasks/20/cook4.html`
[2] `http://ksp.mff.cuni.cz/tasks/21/cook3.html`
[3] `http://cs.wikipedia.org/wiki/Shunting-yard_%28algoritmus%29`

važoval za nepřehledný. Samozřejmě, že na úrovni procesoru se stále používá, ale programátor by od něj měl být odstíněn, pokud to jen jde.

Měl rád programování rovnou na čisto, nejdřív si program rozmyslet a pak jej plynule psát. Lepší je chyby nedělat, než je hledat.

Následující úlohu vymyslete rovnou bez chyb a tak, aby šla zapsat bez `goto`*. Pokud nevíte, co to* `goto` *je, máte to snazší, buďte jen rádi.*

23-3-3 Skok bez padáku — 13 bodů

Z letadla vyskočil Američan, leč až po výskoku si uvědomil, že místo padáku si vzal batoh spolucestujícího Čecha. Naštěstí pro něj je na stráni pod ním rozmístěno N trampolín.

Představme si stráň jako rovinu postavenou svisle, tedy souřadnice x určuje horizontální pozici a souřadnice y je výška.

Každá trampolína je určena dvojicí souřadnic (x, y). Parašutista má nějakou počáteční pozici (x_0, y_0). Padá ve směru osy y, dokud nenarazí na trampolínu, která je o d níže než on. Od ní se odrazí a vyletí o $d/2$ výše, pak si může vybrat, jestli se posune o 1 vlevo, nebo vpravo (posunout se musí) a posune se podle toho.

Toto se opakuje, dokud nedopadne na zem. Na vstupu také dostanete výšku h; pokud spadne na zem z větší výšky, způsobí si zranění neslučitelná se životem a přivolaný lékař konstatuje smrt.

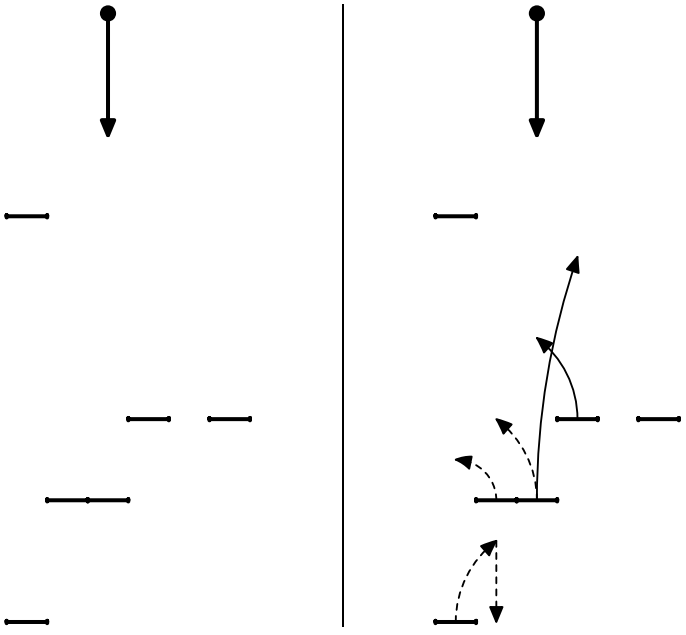
a) Určete, jestli má šanci přežít, a pokud ano, jak má postupovat. Nalezněte nejkratší možné řešení (nejméně odrazů). (5 bodů)

b) Nalezněte všechna možná $y \leq y_0$, pro která přežije pád s počáteční pozicí (x_0, y). (8 bodů)

```
2 15 3
6
0 0
0 10
1 3
2 3
3 5
5 5
```

Příklad vstupu: Na prvním řádku jeho počáteční souřadnice a h_0, na druhém řádku K, na dalších K souřadnice trampolín.

Na obrázku vlevo náčrt zadání, vpravo možné řešení (nejprve skáče po plných, následně po čárkovaných šipkách).



[4] `http://ksp.mff.cuni.cz/about/codex.html`

Zasazoval se o eleganci nejen zdrojových kódů, ale i matematických důkazů. Ty jeho byly zvlášť pěkné. Málokdy přesáhly 16 stran a každou větu pečlivě vybíral, aby nebyla zbytečná, nudná ani nepochopitelná. Důkazy psal jako pohádky. Neměl rád dlouhé formální řady implikací ani důkazy sporem, zato zvládl i třeba v geometrii nebo algebře použít algoritmické důkazy a jiné překvapivé finty z programátorského světa.

Jeho konzervativní přístup k vědě se projevoval třeba tím, že nerad jezdil na konference, ale raději vykládal v menší skupině lidí. Většinu své práce psal na stroji. Osobní počítač si pořídil až ke konci života, ale i tehdy ho používal minimálně a preferoval psaní rukou. Měl krásné technické tiskací písmo, které se používá i jako počítačový font.

23-3-4 Psaní písmen — 10 bodů

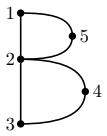
Každé písmeno se skládá z bodů a linií, které je spojují. V jednom bodě může začínat i končit více linií. Při psaní perem lze psát víc navazujících linií jedním tahem, nejde-li to, musí se pero zvednout a začít jinde. Kolikrát nejméně je potřeba pero zvednout?

Na vstupu dostanete neorientovaný graf o N vrcholech a M hranách a vypište, kolika nejméně tahy lze nakreslit.

Samozřejmě šetříme, takže je zakázáno jakoukoli hranu nakreslit více než jednou. Jinak řečeno, nesmíte se vracet po již nakreslených liniích.

Příklad vstupu:

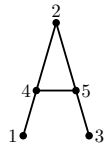
```
5 6
1 2
2 3
3 4
4 2
2 5
5 1
```



výstup: `1`

Jiný příklad:

```
5 5
1 4
4 2
2 5
5 3
4 5
```



výstup: `2`

Tato úloha je praktická a řeší se ve vyhodnocovacím systému CodEx.[4] Formát vstupu a výstupu, povolené jazyky a další technické informace jsou uvedeny v CodExu přímo u úlohy.

Jeden z mnoha jeho textů (EWD 1250) – známý problém dvou párů, loďky a řeky. K řece přišly dva páry a potřebují překonat řeku tak, aby nikdy nezůstal sám pán z jednoho páru s dámou z druhého páru. Loďka unese maximálně dva lidi.

The couples, the river, and the little boat

Here is the problem:

"Two husbands and two wives have to cross a river in a boat which can hold only two people. How can they cross so that no woman is in the company of a man unless her husband is also present?"

(Copyright © 1967 by Morris Kline)

Pamatoval i na ty, kteří už úlohu znali, nebo hned vyřešili. „Žádost: Pokud vám připadá tento problém příliš jednoduchý na to, abyste na něj plýtvali svým časem, hledejte prosím místo toho počet různých řešení. Děkuji. ⟨Konec žádosti.)“

Request If you think this problem too trivial to waste your time on, please state instantaneously the number of different solutions. Thank you. (End of Request.)

Mimochodem, někteří organizátoři KSP mají velmi podobné písmo ... také vám připadá výrazně čitelnější než klasické psací písmo?

Někdy mu bylo vyčítáno, že neuváděl žádné nebo málo zdrojů. Ale co měl dělat, když něco vymyslel jen tak? Navíc většinu své práce nepublikoval v časopisech, ale posílal přátelům a známým. Tyto články jsou označovány EWD (jeho iniciálami) a číslem, třeba EWD 1250, a dají se stáhnout volně na internetu.[5]

Analogii můžeme najít v hudbě, kde se takhle označují díla slavných skladatelů, asi nejznámější jsou BWV (Bach-Werke-Verzeichnis) a HWV (Händel-Werke-Verzeichnis). Zásadní rozdíl je ovšem, že Dijkstra si to čísloval sám, kdežto hudebníci to neřešili a udělal to za ně někdo jiný o mnoho let později.

EWD shromažďuje pan Ham Richards. Jednou, když je nesl, zakopl a rozsypaly se mu po podlaze.

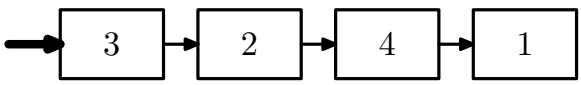
23-3-5 Rozházené EWD — 7 bodů

Chudák pan Richards má jen svou zapomětlivou hlavu a pár papírů, tak budete muset vymyslet, jak setřídit EWD v konstantní paměti. To jest, že si může udělat třeba 1000 záznamů, ale ne pro každou z N EWD jeden. Vámi spotřebovaná paměť prostě na N vůbec nesmí záviset (a N může být libovolně velké – argument, že EWD je konečně mnoho, vám neprojde). Dávejte si pozor na rekurzi, spotřebovává tolik paměti, jak hluboko je zanořená.

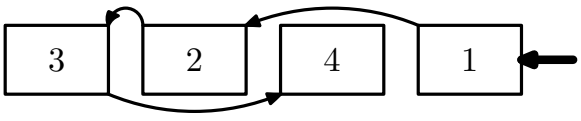
Přeházená EWD budeme reprezentovat jako spojový seznam. V programu dostanete ukazatel na první prvek spojového seznamu, kde je číslo EWD a ukazatel na další. Vaším úkolem je ho setřídit a vrátit ukazatel na první prvek (nejstarší EWD).

Spojový seznam už máte v paměti, vaším úkolem je přepojit jej do setříděného stavu.

Příklad před setříděním:



A po setřídění:



Z úplně jiného soudku je jeho návrh operačního systému THE multiprogramming system, zaměřeného na sekvenční zpracování úloh a s podporou multitaskingu a paralelizace. Velkého rozšíření se sice nedočkal, nicméně myšlenky vytvořené pro něj se ujaly. Jestli vás paralelní svět zajímá, měli jsme o něm kdysi seriál[6] *a také o něm byla série úloh před pár lety v Matematické olympiádě.*

Jako už starý se vrátil do Holandska do svého původního domu ve vesnici Nuen, kde roku 2002 zemřel na rakovinu.

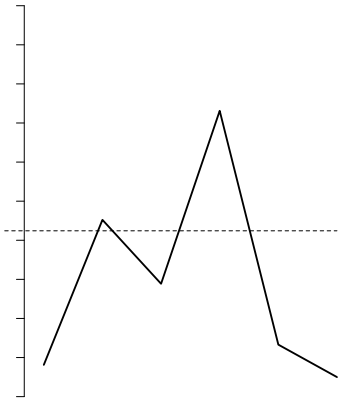
Pozůstalí pak přemýšleli, jestli mu na hrob napsat, že byl matematik, nebo informatik. Hodilo by se jim k rozhodování vědět, kolik procent lidí si nejčastěji myslelo, že byl informatik.

23-3-6 Výzkum veřejného mínění — 9 bodů

Za jeho života se dělalo N výzkumů veřejného mínění, jestli byl informatik. Výsledkem bylo vždy číslo v procentech s přesností na M desetinných míst. N je řádově tolik jako 2^M. Můžeme předpokládat, že výzkumy odpovídaly realitě a mezi jednotlivými výzkumy procento lidí, kteří si myslí, že ano, buď jen stoupalo, nebo jen klesalo. Vaším úkolem je zjistit, jaké procento bylo během jeho života nejčastější. Případně určit libovolné z nejčastějších. Nezapomeňte, že to nutně nemuselo být v době, kdy se konal výzkum.

Příklad vstupu:

```
6 5
8.124 45.223 28.8723 73.117 13.3 5.0
```



Výstup (vyznačen čárkovanou čarou): `42.42` (4×)

23-3-7 Automaty stokrát jinak — 12 bodů

Tento text navazuje na předchozí dvě série, některé pasáže nemusí být lehce pochopitelné bez jejich znalosti.

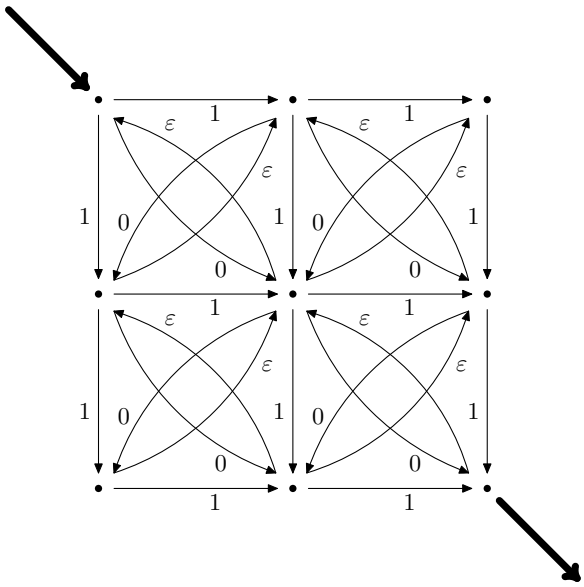
Minule jsme si popsali nedeterministický konečný automat (NKA) s ε-přechody. Definovali jsme, že vstup přijme, pokud v něm existuje alespoň jedna možnost, jak při čtení onoho vstupu skončit ve výstupním stavu.

Běžný program ale neumožňuje paralelně zkoumat všechny větve, kterými by mohl procházet. To bychom si museli pořídit třeba paralelizátor jako v jednom ze starých ročníků olympiády.

Mohli bychom však zkusit převést NKA na DKA, který programem simulovat velmi jednoduše umíme. Dá se dokázat, že to jde vždycky (i když výsledný automat může mít až exponenciální velikost), ale obvykle se to dělá ukázáním obecného postupu, takže si to ukážeme až v řešení.

Úkol 1 [6b]: Vymyslete, jak simulovat NKA a jak převést NKA na DKA. Pokud vám to nepůjde ve vší obecnosti, máte šanci získat 2 body za převod tohoto konkrétního automatu:

[5] `http://www.cs.utexas.edu/users/EWD/welcome.html`
[6] `http://ksp.mff.cuni.cz/tasks/12/`



Samozřejmě, pokud vymyslíte úlohu obecně, tak ji nemusíte řešit konkrétně na tomto automatu, nicméně snad nic nebrání jeho použití třeba k názornému ilustrování vašeho postupu. Za pomoci mašinérie, kterou jsme si zatím ukázali, by pro vás neměl být problém zjistit následující (ale můžete to dělat i jinak, jestli chcete):

Úkol 2 [5b]: Zjistěte, jestli tyto dva regexy popisují stejný jazyk (tedy vyhovují jim právě stejné řetězce):

```
(AB)*(AA(BA)*(A|BB)(AB)*)*
(A(AB)*(B|AA))*
```

Úkol 3 [1b]: Nalezněte nejmenší násobek devíti, jehož desítkový zápis vyhovuje tomuto výrazu:

```
(102)*101(201)*((0|202)(102)*101(201)*)*
```

Nezapomeňte, že součástí každého úkolu je přesvědčit opravujícího, že vaše řešení je správně. Regex bez jakéhokoli vysvětlení není úplné řešení a nemá nárok na plný počet bodů. Stejně tak konstatování „NE“, „10202010102“ nebo „nelze“ ...

Tím jsme uzavřeli kapitolu konečných automatů. Příště se vrátíme zpátky k regexům, ukážeme si, jak se programem `sed` nahrazují řetězce za jiné, co dělat, když regex pro náš požadovaný řetězec prostě neexistuje a jak s tím vším souvisí Chuck Norris.