Korespondenční Seminář z Programování

31. ročník KSP Září 2019

Milí řešitelé, řešitelky a řešitelčata!

Právě si prohlížíte komentáře k úlohám třetí série KSP-H (přesněji k těm, ke kterým jsme uznali, že se komentář hodí). Připomínáme, že od letoška jsou totiž řešení každé série rozdělena na dvě části: na samotná autorská řešení, která vydáváme brzy po termínu série, a komentáře k došlým řešením, která vydáváme až po opravení vašich řešení.

Pokud se vám cokoliv nezdá nebo máte nějaký dotaz, neváhejte se ozvat na našem fóru nebo emailem na známou adresu.

Komentáře k třetí sérii třicátého prvního ročníku KSP

31-3-4 Dláždění sálu

Většina řešení, které jste nám poslali, převáděla dlaždičkování na existenci sledu dané délky ve vhodném grafu. (Sled je podobně jako cesta nějaká posloupnost na sebe navazujících hran, ovšem vrcholy a hrany se v ní mohou opakovat.)

Graf můžeme vytvořit třeba tak, že vrcholy budou všechny K-tice barev pod sebou a orientované hrany natáhneme mezi těmi K-ticemi, mezi které se dá vložit sloupeček K dlaždiček tak, aby barvy navazovaly. Pak stačí zjistit, zda existuje sled délky právě N z obarvení levé stěny do obarvení pravé stěny. To jde provést podobně jako ve vzorovém řešení v čase $\mathcal{O}(N)$. Vylepšení na $\mathcal{O}(\log N)$ pomocí zdvojování nikoho nenapadlo.

Zato hned několik řešitelů vymyslelo, že úlohu jde vyřešit v konstantním čase, protože stačí zjistit, zda se délka nějaké cesty spolu s násobky délek vhodných cyklů mohou poskládat na N. Žádné z těchto řešení nebylo správně, většinou přehlížela to, že cykly lze vlepovat nejen do cest, ale také do jiných cyklů. Tyto problémy je nicméně možno opravit. To vede k následujícímu poněkud divokému řešení, které má opravdu konstantní časovou složitost. Děkujeme za inspiraci jak jim, tak kolegovi Vladanovi Majerechovi.

Máme nějaký konstantně velký orientovaný graf s vrcholy u a v a chceme umět pro libovolné N zjistit, zda existuje sled délky přesně N z u do v.

Budeme konstruovat množiny S_i $(i = 0, \ldots, N)$ všech vrcholů, do kterých se jde dostat z u sledem délky i. Množina S_0 tedy obsahuje jen u, v množině S_1 jsou následníci vrcholu u (tak říkáme vrcholům, do nichž z u přímo vede hrana), v množině S_2 jsou následníci všech vrcholů z S_1 atd. Obecně v S_i jsou všechny vrcholy y, do kterých vede hrana z nějakého $x \in S_{i-1}$. Až sestrojíme množinu S_N, stačí se podívat, jestli v ní leží vrchol v.

Jelikož každou množinu můžeme získat z té předchozí v konstantním čase, tento postup vede na řešení v čase $\mathcal{O}(N)$. To není nic nového, tak rychlé je i vzorové řešení, a dokonce se v něm konstruují množiny S_i velmi podobného významu.

Teď si ale všimneme důležité věci: možností, jak může množina S_i vypadat, je jen konečně mnoho. Proto je-li N hodně velké, nějaké dvě množiny se musí rovnat. Jenže každá množina je jednoznačně určená tou předchozí, takže jakmile se množina zopakuje, bude se od tohoto místa opakovat celá posloupnost množin.

Můžeme to modelovat dalším grafem. Jeho vrcholy budou odpovídat všem podmnožinám množiny všech vrcholů (takže speciálně každá S_i odpovídá nějakému vrcholu). Jako U označíme vrchol odpovídající množině $\{u\}$. Černou barvou označíme vrcholy, jejichž množina obsahuje vrchol v; zbylé vrcholy budou bílé. Hrana povede z X do Y, pokud by z $X = S_i$ plynulo $Y = S_{i+1}$. Původní úloha je tedy ekvivalentní s tím, zda v novém grafu existuje sled délky N z U do jakéhokoliv černého vrcholu.

Nový graf má ovšem velmi speciální strukturu: z každého vrcholu vede právě jedna hrana. Část dosažitelná z U tedy musí mít tvar cesty, která se napojuje na kružnici (takovým grafům se říká „lízátka“). Jakmile známe délku cesty D a délku kružnice K, umíme říci, do kterého vrcholu lízátka se dostaneme po právě N krocích: pokud $N < D$, je to N-tý vrchol cesty; pokud $N \geq D$, jedná se o $((N-D) \bmod K)$-tý vrchol kružnice.

Postačí tedy sestrojit nový graf, spočítat D a K a zapamatovat si, které vrcholy lízátka jsou černé. Výpočet těchto věcí nezávisí na N, takže pro potřeby naší úlohy proběhne v konstantním čase. Pak spočítáme, do kterého vrcholu lízátka nás zavede N-tý krok, a odpovíme podle toho, zda je tento vrchol černý nebo bílý. Zde už N používáme, ale provádíme pouze konstantní množství operací.

Upozorňujeme ovšem, že konstanty v tomto řešení jsou gigantické: počet vrcholů prvního grafu je exponenciální ve velikosti vstupu a počet vrcholů druhého grafu je exponenciální v počtu vrcholů prvního grafu. Naše původní řešení v čase $\mathcal{O}(\log N)$ je tedy velmi pravděpodobně rychlejší pro všechna N, která se vejdou do našeho Vesmíru.

Martin „Medvěd“ Mareš

Výsledková listina třetí série třicátého prvního ročníku KSP

	řešitel	*škola*	*ročník*	*sérií*	*3-1*	*3-2*	*3-3*	*3-4*	*3-5*	*3-6*	*série*	*celkem*
0.					10	13	9	11	11	15	60,0	180,0
1.	Jiří Kalvoda	GJarošeBO	2	3	10	13	9	9	11	15	59,3	176,2
2.	Ondřej Jamelský	G Cheb	1	3	9	5	9	10	11	15	55,4	155,4
3.	Petr Budai	G JGJ PH	2	3	4	5	9	9	5	12	49,4	152,5
4.	Dalibor Kramář	G BO-Řeč	4	4	5	2	9	11	11	11	51,5	152,1
5.	Jiří Kvapil	GTomkovaOL	1	8	9	13	9	1	8	15	55,1	140,3
6.	David Klement	GNAlejíPH	3	6	3,5		5	0	11	15	37,5	132,2
7.	Jan Provazník	GVoděraPH	3	3	4		9			15	30,6	132,1
8.	Petr Zahradník	GaSOŠ ÚL	4	6	10		9	7		12	41,0	128,6
9.	Daniel Skýpala	GTomkovaOL	1	11	10	2	9	11	8	15	53,0	126,4
10.	Lucie Vomelová	GŠpitálsPH	3	4	7		9	1	7	12	42,7	125,5
11.	Jiří Šáda	GVoděraPH	3	3			9			15	24,0	123,3
12.	Jakub Komárek	GUHradiště	4	8	10	3,5	9	9		15	48,2	118,2
13.	Vojtěch Žák	GŠpitálsPH	3	4	4		9		7	8	35,6	117,8
14.	Daniel Kurek	GTomkovaOL	3	3			5		7	15	31,4	116,8
15.	Vladimír Chudý	G Chrudim	2	8	3	5	9		11		30,2	115,6
16.	Jan Piroutek	GŠpitálsPH	3	4	3		9	1	7	15	40,3	111,2
17.	Petr Kolář	GMilevsko	3	3	3		5	5	6		28,9	108,3
18.	Tomáš Černý	GArabskáPH	3	5	4				8	15	30,5	107,8
19.	Martin Zimen	GJMasarJI	4	4	9		5	9			26,7	90,3
20.	Kristýna Petrlíková	VOŠJičín	1	3			9				9,0	89,3
21.	Václav Pavlíček	SPSEPard	3	15	6		1		5	12	19,5	73,5
22.	Lucia Krajčoviechová	GJHroncaBA	3	4			9				9,0	69,1
23.	Daniel Oravec	GVaršŽilina	4	2							0,0	65,7
24.	Ondřej Gonzor	G Brandýs	2	12						12	11,7	64,6
25.	Michal Kodad	SPŠSmíchov	3	15							0,0	62,1
26.	Matěj Kripner	GEBenešeKL	4	8			9				9,0	56,2
27.	Josef Minařík	GJarošeBO	4	4							0,0	54,3
28.	Janek Hlavatý	GJirsíkaČB	0	2							0,0	53,4
29.	Jakub Pánek	SPŠERožnov	4	2							0,0	43,9
30.	Daniil Barabashev	GNadKavaPH	3	2							0,0	42,7
31.	Tomáš Sláma	GTurnov	4	1							0,0	40,6
32.	František Kmječ	StOlavVGS	3	10							0,0	39,8
33.	Jindřich Dítě	VOSPŠŽďár	3	4							0,0	37,8
34.	Marek Černoch	GFPValMez	3	1							0,0	31,5
35.	Jakub Profota	GŘíč	4	1							0,0	30,3
36.	Vojtěch Březina	GCoubTábor	2	3			5				7,1	25,6
37.	Jáchym Mierva	BiGy Žďár	2	4							0,0	23,7
38.	Vít Skalický	GPísnickáPH	1	7			9				9,0	23,3
39.	Martin Miller	GVoděraPH	4	3							0,0	23,0
40.	Jakub Šťastný	G BO-Řeč	4	1							0,0	22,8
41.	Martin Hubata	GMikulášPL	3	1							0,0	22,2
42.	Ondra Müller	GTurnov	2	2			5				7,3	22,0
43.	Linda Kimrová	GEvolutionJM	3	1							0,0	21,2
44.	Matěj Volf	GCoubTábor	1	1							0,0	19,7
45.–46.	Filip Hejsek	GPísnickáPH	2	2							0,0	12,0
	Jan Kaifer	GKepleraPH	3	11							0,0	12,0
47.	Patrik Vácal	SPŠEPlzeň	2	1							0,0	9,5
48.	Ondřej Bleha	GBNěmcovHK	4	3							0,0	9,0
49.–52.	Ondřej Daniš	GFPValMez	4	1							0,0	8,0
	Kristýna Prokopová	GJosBožČT	3	1							0,0	8,0
	Petr Šejvl	SPŠPísek	4	1							0,0	8,0
	Roman Šíp	SPŠPísek	4	1							0,0	8,0
53.	Anna Hollmannová	GSRandyJN	2	5							0,0	7,8
54.–60.	Robert Jaworski	GÚstavníPH	1	1							0,0	7,6
	Vojtěch Jedlička	GCoubTábor	2	1							0,0	7,6
	Petr Khartskhaev	PORGPha	2	1							0,0	7,6
	David Krásný	SPŠEPlzeň	2	1							0,0	7,6
	Petr Macháček	GTýnNVlt	3	1							0,0	7,6
	Jan Najman	SPSEPard	2	1							0,0	7,6
	Jakub Vybiral	GLovosice	2	1							0,0	7,6
61.	Marie Kalousková	GNAlejíPH	3	2	4						6,8	6,8
62.–63.	Vít Gardoň	GPří	3	1							0,0	5,5
	Ondřej Chlubna	GOrlová	2	1							0,0	5,5
64.–66.	Matyáš Boháček	ZŠKladskáPH	1	1							0,0	4,7
	Tomáš Pelák	SŠkybernHK	3	1							0,0	4,7
	Matej Straka	SPŠEPrešov	4	1							0,0	4,7
67.	Ondřej Cach	SPSEPard	3	2							0,0	4,4
68.	Vojtěch Crha	GČeskoliPH	4	1							0,0	4,1

KSP pro vás připravují studenti Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy.

Webové stránky: *https://ksp.mff.cuni.cz/*
E-mail: *ksp@mff.cuni.cz*
Diskusní fórum: *https://ksp.mff.cuni.cz/forum/*

Chcete-li s námi komunikovat bezpečně, můžete si ověřit náš HTTPS certifikát – jeho SHA1 fingerprint je: `E9:DB:EE:C6:62:BC:14:DE:09:E4:E8:97:DC:36:0E:87:B3:50:B0:01`.