

Korespondenční Seminář z Programování

ZAČÁTEČNICKÁ KATEGORIE

26. ročník

KSP-Z

Duben 2014

Právě máte před sebou čtvrtou, a v tomto školním roce poslední, sérii začátečnické kategorie KSP. Jelikož ti poctiví z vás už mají za sebou tři předchozí série (což obnáší dohromady 12 praktických a 6 teoretických úloh), rozhodli jsme se v této sérii úlohy trochu ztížit – stále to však budou úlohy lehčí, než máme v naší hlavní kategorii. Přejeme vám v jejich řešení hodně štěstí.

Termín odevzdání čtvrté série je stanoven na **pondělí 9. června 2014 v 8:00 SELČ**.

Řešení přijímáme elektronicky na <https://ksp.mff.cuni.cz/z/>. Tam také můžete nalézt další informace o tom, jak KSP a KSP-Z fungují. Rovněž tam najdete fórum, kde se můžete na cokoliv zeptat. Anebo nám můžete napsat na email ksp@mff.cuni.cz.



Zadání čtvrté série začátečnické kategorie 26. ročníku KSP

26-Z4-1 Vražedná čísla 8 bodů

Kevin utíkal lesem. Pronásledovalo ho N vražedných čísel. Už ho skoro měla. Rychle proklíčkoval houfem stromů a prudce zatočil. Při tomto obratu zakopl o kořen, upadl a vyvrtil si kotník.

Byl ztracen, vražedná čísla se na něj hrnula ze všech stran. „Kolik je mezi námi dvojic, jejichž součet je násobkem naší královny Q ?“ ptala se čísla neustále dokola. „Řekni kolik, kolik jich je?“

Když byla čísla až u něj a začala se po něm sápat, probudil se na hodině matematiky. Nahlas si oddechl, čímž upoutal pozornost paní učitelky, byl vyvolán k tabuli a dostal zadán onen příklad vražedných čísel ze snu. Měl říci, kolik je mezi N zadanými čísly dvojic se součtem rovným $k \cdot Q$ pro pevně zadané Q a libovolné celé k .

Tvar vstupu: Na vstupu na prvním řádku dostanete čísla N a Q oddělená jednou mezerou ($1 \leq N, Q \leq 1\,000\,000$). Na druhém řádku pak bude N vražedných čísel x_1, \dots, x_N ($-1\,000\,000 \leq x_i \leq 1\,000\,000$).

Tvar výstupu: Na výstup vypište jedno celé číslo udávající počet dvojic, jejichž součet je násobkem čísla Q . Ve dvojici nemůže být dvakrát to samé vražedné číslo, ale dvojice může obsahovat dvě čísla se stejnou hodnotou.

Ukázkový vstup: *Ukázkový výstup:*

5 6
3 3 2 4 9

4

Hledané dvojice jsou: 3 + 3, 2 + 4 a dvakrát 3 + 9.

26-Z4-2 Sbíráni vajíček 10 bodů

Na velikonoční neděli byl u Zuzky a Kevinova doma velikonoční zajíček a nechal jim na zahrádě N velikonočních vajíček. Zahrada má tvar jedné dlouhé nudle a vajíčka na ní leží na souřadnicích v_1, \dots, v_N . Zuzka a Kevin by chtěli všechna vajíčka sesbírat do košíku.

Kevin bude stát na místě a hlídat košík, zatímco Zuzka bude chodit pro vajíčka. Jelikož je malá, může vždy nést maximálně jedno vajíčko. Kam si má Kevin s košíkem stoupnout, aby se Zuzka co nejméně nachodila?



Tvar vstupu: Na vstupu na prvním řádku dostanete číslo N ($1 \leq N \leq 100\,000$). Na druhém řádku bude N celých

čísel x_1, \dots, x_N udávajících souřadnice vajíček (platí pro ně $0 \leq x_1, \dots, x_N \leq 10^9$).

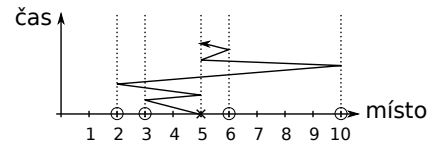
Tvar výstupu: Na výstup vypište jedno desetinné číslo udávající optimální pozici, kam se má Kevin s košíkem postavit. Číslo zaokrouhlete na tři desetinná místa. Pokud existuje více řešení, vypište libovolné z nich.

Ukázkový vstup: *Ukázkový výstup:*

4
3 2 6 10

5

Příklad je znázorněn na následujícím schématu:



Kolečka představují vajíčka, krížek Kevinu s košíkem. Klikatá čára znázorňuje jednu z mnoha možných cest Zuzky pro jednotlivá vajíčka. V tomto případě celkem naběhá $2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 2 \cdot 1 = 22$ metrů. Když si Kevinu zkusíme posunout kamkoliv jinam, zjistíme, že výhodnější pozice než tato není.

26-Z4-3 Hra Othello 10 bodů

Kevin hraje s Petrem hru Othello, kterou můžete znát také pod jménem Reversi. Hrají podle těchto zjednodušených pravidel:

- Hraje se na desce $D \times D$.
- Hráči se střídají pravidelně po jednom tahu.
- Hráč ve svém tahu umístí kámen své barvy na libovolné prázdné pole (což je rozdíl oproti normálním pravidlům, kde je umísťování kamenů omezeno). Pak v každém z osmi směrů provede následující:

Od svého kamene jde po kamenech soupeřovy barvy, dokud nenarazí na svůj kámen, prázdné pole, nebo na kraj desky. Pokud jako na první dojde na svůj kámen, tak všechny soupeřovy kameny, po kterých k němu došel, změní na své. Pokud narazí na prázdné pole a nebo na kraj desky, nic se v tomto směru nestane.

Kevin je zrovna v situaci, kdy jsou na desce právě tři volná políčka a je na tahu. Kolika nejvíce kamenů může na konci hry dosáhnout za předpokladu, že on i Petr hrají optimálně a snaží se maximalizovat počet svých kamenů na konci hry?

Tvar vstupu: Na prvním řádku bude číslo D udávající rozměr desky ($2 \leq D \leq 100$). Na dalších D řádcích bude vždy D znaků K, P, nebo ., kde K značí Kevinův kámen, P Petrův kámen a . (tečka) značí prázdné pole. Je zaručeno, že na vstupu se budou vyskytovat právě tři prázdná pole.

Tvar výstupu: Na výstup vypište, kolik kamenů bude mít Kevin na konci hry za předpokladu, že oba hráči hrají optimálně.

Ukázkový vstup: *Ukázkový výstup:*

4
PK.P
KKPK
.PKK
PKK.

10

První tah musí Kevin vést doprava dolů – i když tím nezíská žádný Petrův kámen, zabráni tak, aby v dalším půltahu přišel o mnohem víc. Zbýlé dva půltahy už jsou symetrické a ve výsledku tak může hráč deska vypadat třeba takto:



PPPP
KKPK
KKKK
PKKK

26-Z4-4 Hlídač v labyrintu 12 bodů

Pamatujete si na Labyrint, ve kterém byli Kevin a jeho kamarádi v minulé sérii? Takové zvláštní bludiště tvoří křížovatkami a chodbami, kde nebyl vůbec žádný cyklus (informatik by takové speciální bludiště mohl nazvat *stromem*).

V novinách se psala děsivá zpráva, že zrovna noc po jejich návštěvě byl Labyrint vykraden. Aby se podobná událost již více neopakovala, rozhodli se majitelé do křížovatek postavit hlídače. Z křížovatek hlídač vidí právě do přilehlých chodeb. Hlídači budou na křížovatkách rozestaveni tak, aby do každé chodby viděl alespoň jeden z nich. Kolik nejméně hlídačů musí majitelé najmout?

Tvar vstupu: Na prvním řádku dostanete číslo N udávající celkový počet křížovatek v Labyrintu ($2 \leq N \leq 333\,333$). Křížovatkami jsou očíslovány čísla $0, \dots, N-1$.

Umístíme 0. křížovátku a pomocí dalších $N-1$ řádků popíšeme uspořádání zbylých $N-1$ křížovatek. Na i -tém řádku bude jedno celé číslo k_i udávající číslo již existující křížovatek, ke které je i -tá křížovátka připojena ($0 \leq k_i < i$).

Tvar výstupu: Na výstup vypište jedno celé číslo udávající, kolik nejméně hlídačů musí majitelé najmout, aby Labyrint uhlídali.

Ukázkový vstup: *Ukázkový výstup:*

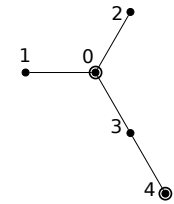
5
0
0
0
3

2

¹ <http://ksp.mff.cuni.cz/viz/26-Z3-4>

Chcete-li s námi komunikovat šifrovaně a bezpečně, můžete si ověřit náš HTTPS certifikát – jeho SHA1 fingerprint je: OE:D9:B6:E5:6F:BO:51:D9:66:EB:E9:29:E4:58:AB:5F:99:D6:FD:A3.

Labyrint odpovídající tomuto vstupu si můžeme představit takto (zvýrazněné křížovatkami označují jedno z možných optimálních rozmístění hlídačů):



26-Z4-5 Podávání rukou 12 bodů

Velikonoce, to je důvod k oslavám. To se tak Kevinovi vždycky sejde celá N -členná rodina, shromáždí se u velkého kulatého stolu a každý s každým si podá ruku. Jelikož mají starou pověrvou babičku, tak se žádné dva páry rukou nesmí křížit.

Podávání rukou funguje tak, že si v jednom taktu vždy některé dvojice podají ruku. Kolik nejméně taktů je potřeba, aby si každý podal ruku s každým? Svá řešení podrobně zdůvodněte.

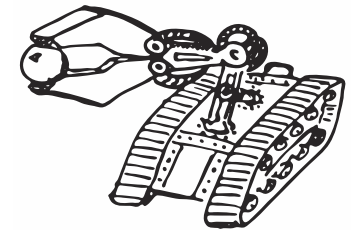
26-Z4-6 Překreslení obrázku 14 bodů

Když byl Kevin o Velikonocích vyšupat Sáru, dostal od ní takový zvláštní černobílý obrázek velký $S \times R$ políček. Obrázek ho celkem zaujal a rozhodl se, že si jej obkreslí. Bohužel má k dispozici pouze stětec velký $K \times K$ políček. Tím chce překreslit alespoň to, co píše.

Stětec je možné přiložit na libovolné místo papíru a obarvit tak příslušných $K \times K$ políček na černo. Jedno políčko je možné obarvit vícekrát. Kevin ale nikdy nechce obarvit žádné políčko, které v původním obrázku bylo bílé. Kolik nejvíce černých políček může vybarvit, aniž by přitom začernil jakékoliv bílé?

Naleznete co nejefektivnější řešení vzhledem k hodnotám S, R a K . Můžete předpokládat, že $K \leq \min(R, S)$. Vše pečlivě zdůvodněte.

Lehčí varianta (za 6 bodů): Pokud si nebudete vědět rady, můžete úlohu zkusit vyřešit jen v jednom rozměru, tedy pro obrázek velký $S \times 1$ a stětec velký $K \times 1$.



Korespondenční Seminář z Programování

ZAČÁTEČNICKÁ KATEGORIE

26. ročník

KSP-Z

Duben 2014

Právě máte před sebou čtvrtou, a v tomto školním roce poslední, sérii začátečnické kategorie KSP. Jelikož ti poctiví z vás už mají za sebou tři předchozí série (což obnáší dohromady 12 praktických a 6 teoretických úloh), rozhodli jsme se v této sérii úlohy trochu ztížit – stále to však budou úlohy lehčí, než máme v naší hlavní kategorii. Přejeme vám v jejich řešení hodně štěstí.

Termín odevzdání čtvrté série je stanoven na **pondělí 9. června 2014 v 8:00 SELČ**.

Řešení přijímáme elektronicky na <https://ksp.mff.cuni.cz/z/>. Tam také můžete nalézt další informace o tom, jak KSP a KSP-Z fungují. Rovněž tam najdete fórum, kde se můžete na cokoliv zeptat. Anebo nám můžete napsat na email ksp@mff.cuni.cz.



Zadání čtvrté série začátečnické kategorie 26. ročníku KSP

26-Z4-1 Vražedná čísla 8 bodů

Kevin utíkal lesem. Pronásledovalo ho N vražedných čísel. Už ho skoro měla. Rychle proklíčkoval houfem stromů a prudce zatočil. Při tomto obratu zakopl o kořen, upadl a vyvrtil si kotník.

Byl ztracen, vražedná čísla se na něj hrnula ze všech stran. „Kolik je mezi námi dvojic, jejichž součet je násobkem naší královny Q ?“ ptala se čísla neustále dokola. „Řekni kolik, kolik jich je?“

Když byla čísla až u něj a začala se po něm sápat, probudil se na hodině matematiky. Nahlas si oddechl, čímž upoutal pozornost paní učitelky, byl vyvolán k tabuli a dostal zadán onen příklad vražedných čísel ze snu. Měl říci, kolik je mezi N zadanými čísly dvojic se součtem rovným $k \cdot Q$ pro pevně zadané Q a libovolné celé k .

Tvar vstupu: Na vstupu na prvním řádku dostanete čísla N a Q oddělená jednou mezerou ($1 \leq N, Q \leq 1\,000\,000$). Na druhém řádku pak bude N vražedných čísel x_1, \dots, x_N ($-1\,000\,000 \leq x_i \leq 1\,000\,000$).

Tvar výstupu: Na výstup vypište jedno celé číslo udávající počet dvojic, jejichž součet je násobkem čísla Q . Ve dvojici nemůže být dvakrát to samé vražedné číslo, ale dvojice může obsahovat dvě čísla se stejnou hodnotou.

Ukázkový vstup: *Ukázkový výstup:*

5 6
3 3 2 4 9

4

Hledané dvojice jsou: 3 + 3, 2 + 4 a dvakrát 3 + 9.

26-Z4-2 Sbíráni vajíček 10 bodů

Na velikonoční neděli byl u Zuzky a Kevinova doma velikonoční zajíček a nechal jim na zahrádě N velikonočních vajíček. Zahrada má tvar jedné dlouhé nudle a vajíčka na ní leží na souřadnicích v_1, \dots, v_N . Zuzka a Kevin by chtěli všechna vajíčka sesbírat do košíku.

Kevin bude stát na místě a hlídat košík, zatímco Zuzka bude chodit pro vajíčka. Jelikož je malá, může vždy nést maximálně jedno vajíčko. Kam si má Kevin s košíkem stoupnout, aby se Zuzka co nejméně nachodila?



Tvar vstupu: Na vstupu na prvním řádku dostanete číslo N ($1 \leq N \leq 100\,000$). Na druhém řádku bude N celých

čísel x_1, \dots, x_N udávajících souřadnice vajíček (platí pro ně $0 \leq x_1, \dots, x_N \leq 10^9$).

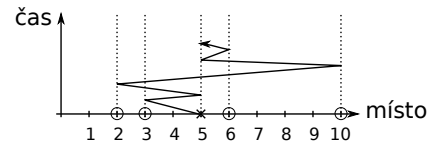
Tvar výstupu: Na výstup vypište jedno desetinné číslo udávající optimální pozici, kam se má Kevin s košíkem postavit. Číslo zaokrouhlete na tři desetinná místa. Pokud existuje více řešení, vypište libovolné z nich.

Ukázkový vstup: *Ukázkový výstup:*

4
3 2 6 10

5

Příklad je znázorněn na následujícím schématu:



Kolečka představují vajíčka, krížek Kevinu s košíkem. Klikatá čára znázorňuje jednu z mnoha možných cest Zuzky pro jednotlivá vajíčka. V tomto případě celkem naběhne $2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 2 \cdot 1 = 22$ metrů. Když si Kevin zkoušíme posunout kamkoliv jinam, zjistíme, že výhodnější pozice než tato není.

26-Z4-3 Hra Othello 10 bodů

Kevin hraje s Petrem hru Othello, kterou můžete znát také pod jménem Reversi. Hrají podle těchto zjednodušených pravidel:

- Hraje se na desce $D \times D$.
- Hráči se střídají pravidelně po jednom tahu.
- Hráč ve svém tahu umístí kámen své barvy na libovolné prázdné pole (což je rozdíl oproti normálním pravidlům, kde je umísťování kamenů omezeno). Pak v každém z osmi směrů provede následující:
Od svého kamene jde po kamenech soupeřovy barvy, dokud nenarazí na svůj kámen, prázdné pole, nebo na kraj desky. Pokud jako na první dojde na svůj kámen, tak všechny soupeřovy kameny, po kterých k němu došel, změní na své. Pokud narazí na prázdné pole a nebo na kraj desky, nic se v tomto směru nestane.

Kevin je zrovna v situaci, kdy jsou na desce právě tři volná políčka a je na tahu. Kolika nejvíce kamenů může na konci hry dosáhnout za předpokladu, že on i Petr hrají optimálně a snaží se maximalizovat počet svých kamenů na konci hry?

Tvar vstupu: Na prvním řádku bude číslo D udávající rozměr desky ($2 \leq D \leq 100$). Na dalších D řádcích bude vždy D znaků K, P, nebo ., kde K značí Kevinův kámen, P Petrův kámen a . (tečka) značí prázdné pole. Je zaručeno, že na vstupu se budou vyskytovat právě tři prázdná pole.

Tvar výstupu: Na výstup vypište, kolik kamenů bude mít Kevin na konci hry za předpokladu, že oba hráči hrají optimálně.

Ukázkový vstup: *Ukázkový výstup:*

4
PK.P
KKPK
.PKK
PKK.

10

První tah musí Kevin vést doprava dolů – i když tím nezíská žádný Petrův kámen, zabrání tak, aby v dalším půltahu přišel o mnohem víc. Zbýlé dva půltahy už jsou symetrické a ve výsledku tak může hrací deska vypadat třeba takto:



26-Z4-4 Hlídač v labyrintu 12 bodů

Pamatujete si na Labyrint, ve kterém byli Kevin a jeho kamarádi v minulé sérii? Takové zvláštní bludiště tvoří křížovatkami a chodbami, kde nebyl vůbec žádný cyklus (informatik by takové speciální bludiště mohl nazvat *stromem*).

V novinách se psala děsivá zpráva, že zrovna noc po jejich návštěvě byl Labyrint vykraden. Aby se podobná událost již více neopakovala, rozhodli se majitelé do křížovatek postavit hlídače. Z křížovatek hlídač vidí právě do přilehlých chodeb. Hlídači budou na křížovatkách rozestaveni tak, aby do každé chodby viděl alespoň jeden z nich. Kolik nejméně hlídačů musí majitelé najmout?

Tvar vstupu: Na prvním řádku dostanete číslo N udávající celkový počet křížovatek v Labyrintu ($2 \leq N \leq 333\,333$). Křížovatkami jsou očíslovány čísla $0, \dots, N-1$.

Umístíme 0. křížovátku a pomocí dalších $N-1$ řádků popíšeme uspořádání zbylých $N-1$ křížovatek. Na i -tém řádku bude jedno celé číslo k_i udávající číslo již existující křížovatek, ke které je i -tá křížovátka připojena ($0 \leq k_i < i$).

Tvar výstupu: Na výstup vypište jedno celé číslo udávající, kolik nejméně hlídačů musí majitelé najmout, aby Labyrint uhlídali.

Ukázkový vstup: *Ukázkový výstup:*

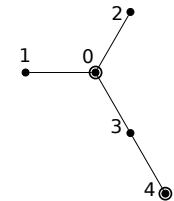
5
0
0
0
0
3

2

¹ <http://ksp.mff.cuni.cz/viz/26-Z3-4>

Chcete-li s námi komunikovat šifrovaně a bezpečně, můžete si ověřit náš HTTPS certifikát – jeho SHA1 fingerprint je: OE:D9:B6:E5:6F:B0:51:D9:66:EB:E9:29:E4:58:AB:5F:99:D6:FD:A3.

Labyrint odpovídající tomuto vstupu si můžeme představit takto (zvýrazněné křížovatkami označují jedno z možných optimálních rozmístění hlídačů):



26-Z4-5 Podávání rukou 12 bodů

Velikonoce, to je důvod k oslavám. To se tak Kevinovi vždycky sejde celá N -členná rodina, shromáždí se u velkého kulatého stolu a každý s každým si podá ruku. Jelikož mají starou pověrvou babičku, tak se žádné dva páry rukou nesmí křížit.

Podávání rukou funguje tak, že si v jednom taktu vždy některé dvojice podají ruku. Kolik nejméně taktů je potřeba, aby si každý podal ruku s každým? Svá řešení podrobně zdůvodněte.

26-Z4-6 Překreslení obrázku 14 bodů

Když byl Kevin o Velikonocích vyšupat Sáru, dostal od ní takový zvláštní černobílý obrázek velký $S \times R$ políček. Obrázek ho celkem zaujal a rozhodl se, že si jej obkreslí. Bohužel má k dispozici pouze stětec velký $K \times K$ políček. Tím chce překreslit alespoň to, co píše.

Stětec je možné přiložit na libovolné místo papíru a obarvit tak příslušných $K \times K$ políček na černě. Jedno políčko je možné obarvit vícekrát. Kevin ale nikdy nechce obarvit žádné políčko, které v původním obrázku bylo bílé. Kolik nejvíce černých políček může vybarvit, aniž by přitom začernil jakékoliv bílé?

Naleznete co nejefektivnější řešení vzhledem k hodnotám S, R a K . Můžete předpokládat, že $K \leq \min(R, S)$. Vše pečlivě zdůvodněte.

Lehčí varianta (za 6 bodů): Pokud si nebudete vědět rady, můžete úlohu zkusit vyřešit jen v jednom rozměru, tedy pro obrázek velký $S \times 1$ a stětec velký $K \times 1$.

