

Korespondenční Seminář z Programování

ZAČÁTEČNICKÁ KATEGORIE

29. ročník

KSP-Z

Prosinec 2016

Skončila druhá série KSP-Z a my vám přinášíme autorství řešení úloh. Věříme, že vám pomohou k tomu, abyste se v programování a hlavně v řešení problémů pořádk zlepšovali. Gratulujeme všem, kdo získali nějaké body!

A jako obvykle se nás nebojte zeptat, pokud vám cokoliv není úplně jasné. Obrátit se na nás můžete přes fórum na našich stránkách nebo e-mailem na ksp@mff.cuni.cz.



Řešení druhé série začátečnické kategorie 29. ročníku KSP

29-Z2-1 Krocení zlé želvy

Naším úkolem bylo ze zadané posloupnosti příkazů zjistit, kde skončí Kevinova želva, až všechny tyto příkazy vykoná. Jako první je dobře si uvědomit, že úlohu můžeme řešit bez toho, abychom si vytvářeli velké pole a pohyb želvy po něm simulovali.

Tedy, abychom použili analogovou analogii, není potřeba vstít do ruky (velký) čtvercovaný papír a postupně si kreslit kterými políčky želva projde. Namísto toho si stačí pamatovat vždy jen aktuální pozici a směr želvy.

Jakmile totiž zjistíme, jak ji posunovat, můžeme namísto směřování na velkém poli či po čtvercovaném papíře, prostě jen aplikovat změnu na zapamatovanou pozici či směr. V případě pokynu A konkrétně změnit pozici a při pokynů < a > otočení.

Pozice se skládá ze dvou souřadnic. Můžeme si představit třeba čtvercovaný papír se čtvercem $(0, 0)$ někde uprostřed.

Směr je ještě jednohdiší, stačí si pamatovat, zda jsme otočili na sever, západ, jih nebo východ. Prakticky tedy postačí libovolná číselná proměnná. Na začátku je želva otočená nahoru.

Pro pořádky indexace si směry otočení seřadíme jak jsou napsané výše. Otočení s indexem 0 (přeci jen většina programovacích jazyků indexuje od 0, tak budeme konzistentní) bude na sever, s indexem 1 na západ a dále logicky proti směru hodinových ručiček.

Jakmile si vytvoříme takovouto reprezentaci, můžeme si všimnout, že otočení doleva je vždy zvýšení čísla otočení a doprava snížení. Problém jsou jen krajní hodnoty – když máme směr s indexem 3 (tj. na východ) a otočíme se doleva, dostaneme se na otočení na sever, tedy index 0.

Nastěstí ale nemusíme tyto krajní případy řešit separátně. Stačí místo upraveného indexu otočení vstít jeho zbytek po dělení čtyřmi, tj. např. $((i + 1) \bmod 4)$, a dostaneme přesně to, co chceme.

Otáčení máme vyřešeno. Stačí už jen vymyslet, jak aktuální směr aplikovat v případě příkazu A, tedy posunut želvy dopředu. Nejjednodušší řešení je připravit si dvě pole o čtyřech prvcích. Jedno pro změnu souřadnice v x -ové a druhé v y -ové ose pro každý možný směr otočení.

Pro osu x může dané pole vypadat třeba takto: $[0, -1, 0, 1]$. Při otočení nahoru se při pohybu vpřed naše x -ová souřadnice nezmění. Při otočení doleva se zmenší o jedna a obdobně dále.

Při provádění příkazu A se pak jen podíváme do obou polí na hodnotu indexovanou otočením a danou hodnotou přičteme k odpovídající souřadnici aktuální pozice.

Časová složitost algoritmu je lineární s počtem příkazů, na každém totiž strávíme konstantně času. Paměťová je konstantní, pokud nepočítáme, že si je třeba pamatovat vstup. V průběhu algoritmu si totiž pamatujeme nezávisle na velikosti vstupů jen dvě pomocné proměnné.

Program (Python 3):
<http://ksp.mff.cuni.cz/v1z/29-22-1.py>

Petr Houška

29-Z2-2 Sášina volba

Abychom se dozvěděli, kdo rozložíme o plánech na vítědn, stačí spočítat počet Sáhových a Kevinových vítězství. Na vstupu dostaneme řetězec Sáhových a poté Kevinových tahů. Náčtenne si je oddělené do dvou proměnných. Zároveň si budeme pamatovat aktuální počet vítězství každého.

Pak již jen stačí procházet jednotlivé hry. Nejdříve vyhodnotíme první hru (tj. na indexu 0 v obou řetězcích), pak hru na indexu 1 až k poslední $n - 1$. K tomu nám poslouží například cyklus `for`, v jehož každém průchodu vítězi přičteme jedno vítězství.

Při procházení potřebujeme rozložit, kdo danou hru vyhrál. UVědomíme si, že hra může skončit pouze devíti stavy (každý má tři možnosti jak zahrát), které můžeme snadno otestovat podmínkami.

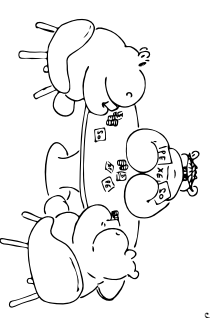
Pokud oba zahráli stejně, nevyhrál nikdo a přeskóčíme rovnou na další hru.

Pokud Sára hrála kámen a Kevin máčky, pak vyhrála Sára a připočteme ji jedno vítězství. Stejně tak v případě Sára máčky + Kevin papír a Sára papír + Kevin kámen.

Pokud nenašla ani jedna z předložených kombinací, pak nutně vyhrál Kevin, a proto mu připočteme jedno vítězství.

Program (Python 3):
<http://ksp.mff.cuni.cz/v1z/29-22-2.py>

Jan Krůžek



29-Z2-3 Petr v říši divů

V této úloze se ptáme, do kolika dalších políček lze v mřížce doestouvat, pokud vyjdeme z jednoho konkrétního – Petrovy pozice. Na to se nejlépe hodí nějaká prohlédávací. Chrábí bychom prohlédávat od Petrovy pozice a každé políčko, na které dojdeme, si započítat a označit (nedecemne některá políčka započítat vícekrát).

Prohlédávat hledáme následovně: vytvoříme si frontu, ve které budeme skladowat všechna políčka, která ještě dlece m. projít. Na začátku do ni přidáme jen políčko, na kterém stojí Petr. Pokaždé z fronty vytáhneme prvního kandidáta a podíváme se na jeho sousední políčka. Do fronty potom přidáme všechna políčka, která jsou ještě nenašátrána a nejsou to zdi.

Sousední políčka poznáme tak, že se jejich souřadnice liší o ± 1 od aktuálního políčka (například políčko napravo má souřadnici x větší o 1, a y stejnou). Každé políčko, které jsme do fronty přidali, započítáme, označíme a potom vytáhneme další.

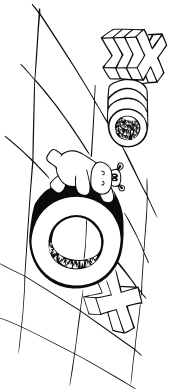
Jakmile bude fronta prázdná, tak jsme dokončili procházení z Petrovy pozice a nikam jít se už nedostaneme. Zbývá tedy vypsat číslo, které jsme napočítali a skončit.

Poslední malý problém k vyřešení je, jak najít pozici, na které se nachází Petr a Sára. Protože mohou být kdekoli v mapě, nepomůže nám žádný chytrý algoritmus a musíme zkontrolovat všechna políčka. Budeme procházet od začátku jedno po druhém, dokud nenarazíme na znak P a jeho pozici si zapamatujeme.

Zbývá si rozmyslet, zda se nemůže stát, že v lese existuje políčko, na které by se Petr a Sára mohli dostat, ale my jsme ho nezapočetli. To se nestalo, protože do fronty se během prohlédávání dostalo každé dostupné políčko. Neopak, nezapočetli jsme náhodou nějaká navíc? Protože jsme přičítali pouze volná políčka, na která jsme se mohli dostat, nezapočetli jsme nic navíc.

Jak je to celé rychlé a kolik to žere paměti v počítači? Nalezni Petra se Sárou trvá $O(R \cdot S)$, prohlédávání trvalo také $O(R \cdot S)$, protože každé políčko se do fronty dostalo maximálně jedenkrát. Celý program je tedy lineární a dokonce trvá pouze $O(R \cdot S + R \cdot S) = O(R \cdot S)$

Paměťová složitost je také lineární $O(R \cdot S)$, protože jdi-né, co si potřebujeme pamatovat je mapa, která má $R \cdot S$ políček, a fronta, ve které se nikdy více políček než jich je v mapě neobjeví. Pokud si nejsi jistý v tom, co v tomto odstavci řešíme, mižš si přečíst kuchařku o složitosti.¹



Na závěr podotkneme, že program se určitě zastaví, protože hledání Petra skončí po maximálně N krocích a naše prohlédávání se zastaví, neboť každé políčko dáme do fronty maximálně jednou.

¹ <http://ksp.mff.cuni.cz/viz/kucharka/slozitosť>

² <http://ksp.mff.cuni.cz/viz/kucharka/grafy>

Jako třetíčku na dortu přidáme, že algoritmus, který jsme použili při řešení je ve světě informatiky tak rozšířený, že má své vlastní jméno. Jmenuje se BFS – prohlédávání do šířky a dá se použít na různé grafové problémy. Pokud nevíš, co graf je, mohla by tě zajímat naše kuchařka o grafech.² Pokud už grafy znáš, tak si mižšš rozmyslet, že čtverčeková síť, jako naše mapa ze zadání, je vlastně graf. Stačí každé políčko prohlásit za vrchol a spojit ho čtyřmi hranami s jeho sousedy.

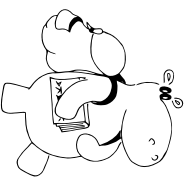
Program (Python 3):
<http://ksp.mff.cuni.cz/viz/29-Z2-3.py>

Stěpán Hojdar

29-Z2-4 Zuzka: Cesta tam a zase zpátky

Zadání po nás chtělo, abychom Zuzce našli nejlepší úsek, ve kterém přijde nejvýše K sekund do kopce. Nejprve vyzkoušíme jednoduché řešení.

Pro každé místo v posloupnosti vyzkoušíme, jestli náhodou ta nejlepší podposloupnost nezачíná zrovna tam. Tedy si naprogramujeme funkci, které řekneme začátek, a ona od něj najde nejlepší možný úsek, ve kterém přijde maximálně K sekund do kopce.



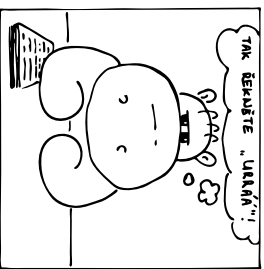
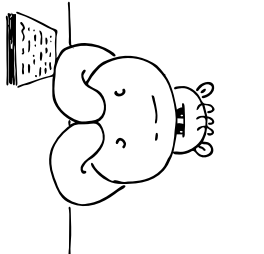
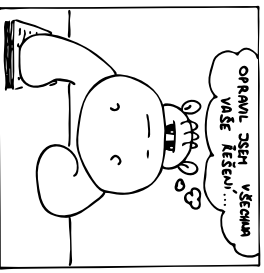
To je přeci jednoduché – porůjme si energetickou kasíčku, do které vložíme K penízů, a postavíme Kevinu na začátek. Poté necháme Kevinu jít co nejdále to přijde. Z kopce a po rovině přijde zadarmo, ale do kopce bude chít penízek z kasíčky. Jakmile bude chít Kevin penízek, ale kasíčka bude prázdná, skončíme. Stejně tak pokud dojde Kevin na úplný konec trasy.

Z takto nalezených posloupností už jen snadno vybereme tu nejlepší. Jak to celé bude rychlé? Představte si dlouhou cestu, která bude o všem celá z kopce. Naše funkce tedy pokaždé dojde až na konec cesty a celkem vykoná $N + (N - 1) + \dots + 1$ kroků, což je o všem součet aritmetické posloupnosti, který vyjde v $O(N^2)$.

Chudák Kevin musí totiž pořád chodit tu samou trasu znovu a znovu. Provedme jednoduché pozorování: pokud posuneme začátek doprava, Kevin může dojít jen dále – konec se nemůže posunout vlevo. Kevin se tedy nemusí vůbec vracet! Na začátku algoritmu postavíme jak Zuzku tak Kevinu na začátek trasy. Kevinu pošleme kupředu, aby došel co nejdále, ale maximálně K sekund šel do kopce. Od této chvíle bude platit následující invariant (tvrzení, jehož platnost se v průběhu algoritmu nemění): mezi Kevinem a Zuzkou bude právě K sekund chůze do kopce.

Tedy přijde řada na Zuzku. Ta přijde dopředu, ale pouze z kopce či po rovině. Kdyžkoli by měla jít do kopce, zavolá Kevinovi, a sekundou do kopce přijde společně. Poté si Zuzka může odpočnout a Kevin utéct Zuzce co nejdále z kopce.

| | řešitel | škola | ročník | serió | 22-1 | 22-2 | 22-3 | 22-4 | 22-5 | 22-6 | serie | celkem |
|-----------|-------------------|-------------|--------|-------|------|------|------|------|------|------|-------|--------|
| 104.-105. | Evegyňa Knyazeva | GNNPřánpH | 3 | 2 | | 10 | | | | | 10,0 | 24,0 |
| | Roman Ondráček | GBoskovic | 3 | 7 | | | | | | | 0,0 | 24,0 |
| 106. | Tomáš Dosáhl | MendelG-OP | 3 | 1 | 8 | 10 | 1 | 4 | | | 23,0 | 23,0 |
| 107.-108. | Lukáš Vavřík | GNeumannZR | 2 | 1 | | | | | | | 0,0 | 22,0 |
| | Marek Zelený | GVoderatPH | 3 | 1 | | | | | | | 0,0 | 22,0 |
| 109. | Thuan Anh Hoang | GZborovPH | 3 | 3 | 8 | 10 | 0 | | | | 18,0 | 21,0 |
| 110.-111. | Ondřej Buřek | GJarosBo | 3 | 1 | 8 | 8 | 0 | 4 | | | 20,0 | 20,0 |
| | Ondřej Gajda | GTrš | 0 | 2 | | | | 9 | | | 9,0 | 20,0 |
| 112.-123. | Dávid Dambner | GVaršilina | 2 | 1 | | | | | | | 0,0 | 18,0 |
| | Dominik Dnh | GNNPřánpH | 2 | 1 | 8 | 10 | | | | | 18,0 | 18,0 |
| | Vít Gadtnrek | | 2 | 6 | | | | | | | 0,0 | 18,0 |
| | Alexandra Géciová | GJHonecBA | 1 | 2 | 8 | 10 | 0 | 0 | | | 18,0 | 18,0 |
| | Tereza Hladíková | JazG HK | 3 | 1 | | | | | | | 0,0 | 18,0 |
| | Štěpán Košan | GKlarov | 4 | 2 | | | | | | | 0,0 | 18,0 |
| | Jiří Kvapil | GTomkovaOL | -1 | 2 | 8 | 10 | 0 | | | | 18,0 | 18,0 |
| | Václav Lunták | GDsařskáPA | 4 | 1 | 8 | 10 | | | | | 18,0 | 18,0 |
| | Ondřej Mašek | GEBaněskKL | 3 | 3 | | | | | | | 0,0 | 18,0 |
| | G BO-Reč | G BO-Reč | 3 | 2 | 8 | 10 | | | | | 18,0 | 18,0 |
| | Pavel Turinský | G Branýs | 4 | 5 | | | | | | | 0,0 | 18,0 |
| | Marěj Smid | SPSÚjabPH | 3 | 4 | 8 | 10 | | | | | 18,0 | 18,0 |
| 124.-126. | Martin Hubara | GMřiknášPL | 1 | 3 | | | | 2 | | | 9,0 | 16,0 |
| | Arian Adam Ort | GSOSRok | 0 | 2 | 8 | 8 | | | | | 8,0 | 16,0 |
| | David Rajclman | MasG_Přeh | 0 | 2 | 8 | 8 | | | | | 8,0 | 16,0 |
| 127. | Petr Doubavský | AkademG-PH | 1 | 2 | 2 | 10 | | | | | 12,0 | 15,0 |
| 128. | Tomáš Chabada | SPSMasarPL | 1 | 1 | 6 | 8 | | | | | 14,0 | 14,0 |
| 129. | Jan Koška | GJrovceCB | -3 | 1 | | | | 10 | | | 13,0 | 13,0 |
| 130.-131. | Ondřej Hráček | GOLgHavl | 0 | 1 | | | | 3 | | | 0,0 | 12,0 |
| | Vojtěch Lengál | GZborovPH | 3 | 1 | | | | | | | 0,0 | 12,0 |
| 132. | Mária Duračková | GJHonecBA | 2 | 1 | | | | | | | 0,0 | 10,0 |
| 133.-138. | Martín Ferech | GJHonecBA | -1 | 1 | | | | | | | 0,0 | 8,0 |
| | Franšek Hanzlík | ZŠ Ejem | 4 | 1 | | | | | | | 0,0 | 8,0 |
| | Jan Hřebeňat | ZŠ ZS | 0 | 1 | | | | | | | 0,0 | 8,0 |
| | Jan Kurálek | GSOSNovJcin | 3 | 1 | | | | | | | 0,0 | 8,0 |
| | Šimon Prokop | ZŠ ZS | 0 | 1 | 8 | | | | | | 8,0 | 8,0 |
| | Natalie Volková | GJrovceCB | 1 | 1 | | | | 0 | | | 0,0 | 8,0 |
| 139.-140. | Petr Chotěbořský | GSla | 0 | 1 | | | | | | | 0,0 | 6,0 |
| | Jakub Svojtgr | GCosačCB | -2 | 1 | 6 | | | | | | 6,0 | 6,0 |
| 141. | Petr Kabournek | G BO-Reč | 1 | 1 | 4 | | | 0 | | | 4,0 | 4,0 |
| 142. | Tomáš Husák | GJHonecPH | 3 | 1 | | | | | | | 0,0 | 3,0 |
| 143. | Filip Bouda | SSŠtrševce | 1 | 1 | | | | | | | 0,0 | 2,0 |
| 144. | Štěpán Henrych | GŽat | 1 | 1 | | | | 0,3 | | | 0,3 | 0,3 |



KSP pro vás připravují studenti Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy.

Webové stránky:

<https://ksp.mff.cuni.cz/>

E-mail:

ksp@mff.cuni.cz

Diskusní fórum:

<https://ksp.mff.cuni.cz/forum/>

Chcete-li s námi komunikovat bezpečně, můžete si ověřit náš HTTPS certifikát – jeho SHA1 fingerprint je: E9:DB:EE:C6:62:BC:14:DE:09:E4:E8:97:DC:36:0E:87:B3:50:80:01.

Zajímá nás chvíle, kdy budou Kevin se Zuzkou nejdříve od sebe. To je totiž délka invariantu chvíle, kdy Kevin se Zuzkou vymezují nejdelší podpostupnost podle zadání.

Jakmile Kevin dojde na konec trasy, můžeme rovnou skončit, protože Zuzka už se bude jen přiblížovat.

Tedy už víme, že algoritmem vydané řešení bude vždy správné, ale ještě nám zbývá ukázat, že pokud řešení existuje, algoritmus ho najde. To je nejtěžšíí jednoduché, protože každé řešení musí někde začít a přes to místo musí Zuzka někdy přejít.

Algoritmus samozřejmě nebudeme posílat Zuzce a Kevinovi tihnetat cestu, ale budeme si posouvat dva ukazatele nad polem. Když si uvědomíte, že oba ukazatele posouváte pouze vpravo, vyjde z toho optimální časová složitost $O(N)$.

Paněťovon složitost máme ovšem zatím také lineární. Pokud bychom chtěli ušetřit, musíme se vydat ještě o křížek dál. Nez si ale přičtete další odstavce, načítá celý soubor se vstupem do paměti k řešení většinou bohatě stačí. Následující informace tedy berete jako teoretický bonus.

Všimněte si, že v celém algoritmu nás vlastně vůbec nezajímaly konkrétní hodnoty nadmořských výšek. Misto nich nám stačí uvážovat, kdy cesta vedla do kopce a kdy z kopce. Dokonce ani nepotřebujeme mít jednotlivé sekundy v paměti rozdělené – stačí nám konkat na to, jak dlouhé jsou úseky z kopce mezi jednotlivými sekundami do kopce.

Mohl bychom tedy algoritmus poznamenat tak, že by načítal jednotlivé čísla s tím, jak přeseouva Kevin, a pro Zuzku už by si pamatoval jen délku dalších K úseků z kopce. Tím bychom srazili paměťovou složitost na $O(K)$.

Program (Python 3):

<http://ksp.mff.cuni.cz/viz/29-22-4.py>

Ondra Hlavatý

29-22-5 Dva roky bez prázdnin

Od Skliby jsme dostali úkol najít původce řetězu putováni spamu mezi bytostmi. Nejprve si můžeme rozmyslet, že řetěz rozestání e-mailů nám tvoří nějaký orientační graf. Seznam dvojic, jenž Skliba získal, není nic jiného, než seznam hran, avšak neorientovaných, v tomto grafu. Vrcholy potom reprezentují jednotlivé bytosti, které se dostaly do styku se spamenem.

Dále víme, že každé bytosti spam přišel nejméně jednou a možná jej odeslala dalším K bytostem. V řeči grafi to znamená, že nejméně jedna hrana do vrcholu (bytosti) vstupuje a vystupuje z něj buď K hran, nebo žádná.

Strupněm vrcholů budeme znát počet hran, které vedou do nebo z daného vrcholu. Podívejme se tedy na možnosti, jaký může být stupeň vrcholu bytosti:

- Pokud bytosti spam přišel, do jejího vrcholu vede právě jedna hrana, stupeň se tedy zvýší o 1.
- Pokud bytost spam odeslala dalším K bytostem, stupeň jejího vrcholu se zvýší o K .

Pojďme z toho prozkoumat, jakého tvaru tento graf nabývá. Jiz víme, že každý vrchol má nejméně jednodlo předchůdce. Také má každý vrchol právě 0 nebo K potomků. Takový graf napadáne připomíná strom.

Kdybychom se nezabývali orientací hran, opravdu o strom jde. Kofeřem je v tomto případě původce spamu a listy

jsou doručitelé, kteří dále spam nerozesílali. Dále si můžeme všimnout, že je tento strom k -ární, jelikož každý vrchol, jenž není list, má právě k potomků.

Stupně vrcholů v našem grafu tedy můžou být 1 pro „listy“, k pro „kofeři“, nebo $k+1$ pro ostatní. Z toho můžeme usoudit, že chceme-li najít původce spamu, stačí nám najít kořen v pomyslném stromě, který má stupeň právě k . Zadržijte jiný vrchol stejný stupeň už mít nebude, původce je jen jeden.

Ten můžeme najít takto: Postupně projdeme jednotlivé dvojice a budeme si poznamenávat pro každou bytost, kolikrát se vyskytla v nějaké z dvojic. Všimneme si, že tento počet odpovídá právě stupni jejího vrcholu. Potom stačí vyhlásit bytost s právě k vyskytvy jako původce spamu.



Jak dlouho nám hledání původce potrvá a kolik při tom spotřebujeme paměti? Každou z M dvojic musíme projít právě jednou. Celkové náklady tímto procházením strávíme $O(M)$ času. Pokud projdeme každou z N bytostí a zkomárnme počet vyskytů. Časová složitost je tedy $O(N + M)$. Dále si musíme pro každou bytost něco málo pamatovat, paměti tak spotřebujeme $O(N)$.

Kolik dvojic ale může být celkem? Jelikož každému až na jedinéto původce, přišel spam právě jednou, bude těchto dvojic právě $N-1$. Časová složitost nám tedy ve skutečnosti sejde na $O(N)$.

Václav Korčák

29-22-6 Devět trpaslíků

Kevin a Zuzka dostanou řadu N čísel v určitém pořadí a u ni mají za úkol rychle odpovídat na určité dotazy. Ty se týkají součtů čísel mezi a -tým a b -tým číslem řady.

Zjevné řešení je pro každý dotaz posloupenost znovu projít a od a -tého do b -tého indexu čísla seřadit. Pokud by se trpaslíci přáli pořádk na součet celé řady, procházeli bychom vždy všech N čísel znovu. Kivili tomu je časová složitost na jeden dotaz $O(N)$.

Zkusíme zvolit úplně jiný postup. Budeme na něj sice potřebovat více času na přípravu, ale budeme douhat, že se nám to vyplácí. Nasím cílem je odpovědět co nejrychleji. Využijeme toho, že seřadit má dobré vlastnosti (například pro násobení by naše řešení nehmngoval), a předpokládáme si čísla, že kterých budeme schopni rychle vykonkat řešení. V dalších odstavcích budeme součet čísel mezi a -tým a b -tým indexem znát $s(a, b + 1)$. Následujeme tedy běžné programátorské pojetí intervalů, kdy $s(a, b)$ značí součet takového úseku, do kterého a patří ale b už ne.

Představme si, že známe součty na dvou úsecích, které mají společný začátek: $s(a, b)$ a $s(a, c)$. Z těchto čísel jsmne schopní odvodit $s(b, c)$ – ten je roven $s(a, c) - s(a, b)$. Rozpajšje si to. Uvidíte, že se čísla na začátku odečtou a zůstanou jen ta správná.

Takto faktor využijeme a spočítáme si součet $s(0, x)$ pro každé x . Úsaku začínající na začátku posloupnosti se nazývá prefix posloupnosti, a proto se posloupnosti jejich součtů obvykle říká prefixové součty.



matfyz

Uvedeme příklad. Máme řadu čísel 1, 5, 4, 3, 6 a chceme k ní znát všechny prefixové součty. Ty bychom vypsalť následovně: 0, 1, 6, 10, 13, 19. Spočítat všechny prefixové součty můžeme průběžně při načítání – každé číslo stačí přičíst k předchozímu, už sečtenému prefixu, a máme součet o jedné dalšího prefixu. Díky tomu nám počítání zabere pouze $O(N)$.

součty[0] = 0
for i in range(N+1):
 součty[i] = součty[i - 1] + čísla[i - 1]

Abychom mohli počítat s celou řadou na vstupu, přidáme si na konec součtů ještě jeden prvek navíc, součet celé řady (proto N+1). Všimněte si ale, že čas na přípravu nás vlast-

ně moc nezdrží – pokud nechceme čísla číst rovnou ze souboru, nevýhoda se nečítání do paměti. To už ale trvá stejně dlouho, jako počítání prefixových součtů.

A když už máme pole prefixových součtů připravené, datazy se zodpovídají velmi snadno. Hodnota součtu čísla mezi a -tým a b -tým je rovna součty[b + 1] - součty[a]. Na datazy tedy umíme odpovídat v konstantním čase, ale potřebujeme $O(N)$ času na přípravu. Panělová složitost je $O(N)$. Pokud se chcete o prefixových součtech a jejich využití dozvědět více, podívejte se na kapitulu kuchařky o intervalových stromech.³

Ondra Hlavatý

Výsledková listina druhé série začátečnické kategorie 29. ročníku KSP

| | <i>řešitel</i> | <i>škola</i> | <i>ročník série</i> | | | | | | <i>série celkem</i> | | | | |
|--------|--------------------|---------------|---------------------|------|------|------|------|------|---------------------|-------|------|-------|------|
| | | | Z9-1 | Z9-2 | Z9-3 | Z9-4 | Z9-5 | Z9-6 | | | | | |
| 0. | | | 8 | 10 | 10 | 12 | 12 | 14 | 66,0 | 132,0 | | | |
| 1. | Jakub Štastný | G BO-Rěč | 8 | 10 | 10 | 12 | 12 | 14 | 66,0 | 133,0 | | | |
| 2-3. | Lucie Krajetřelová | G HroncBa | 1 | 2 | 8 | 10 | 10 | 12 | 66,0 | 132,0 | | | |
| | Petr Šimunek | G Hořice | 4 | 2 | 8 | 10 | 10 | 12 | 66,0 | 132,0 | | | |
| 4-5. | Eric Kutáček | G HorMihal | 4 | 2 | 8 | 10 | 10 | 12 | 66,0 | 131,0 | | | |
| | Daniel Skypala | G TomskaOL | -1 | 6 | 8 | 10 | 10 | 12 | 65,0 | 131,0 | | | |
| 6. | Ondřej Gonzor | G Brandýs | 0 | 5 | 8 | 10 | 10 | 12 | 66,0 | 130,0 | | | |
| 7. | Dávid Šutor | G TerVans | 2 | 2 | 8 | 10 | 10 | 12 | 65,5 | 127,5 | | | |
| 8-9. | Petr Ambrecht | G HeyrovPH | 2 | 2 | 8 | 10 | 10 | 12 | 60,0 | 126,0 | | | |
| | Jakub Šuraň | G Strážnice | 2 | 2 | 8 | 10 | 10 | 12 | 66,0 | 126,0 | | | |
| 10. | Petr Bornáš | G Ronhlice | 1 | 2 | 8 | 10 | 10 | 12 | 65,0 | 125,0 | | | |
| 11. | Michela Bobemiová | G Poškošovice | 2 | 2 | 8 | 10 | 10 | 12 | 62,0 | 116,0 | | | |
| 12. | Vladimír Chudý | ZŠ Rovnov | 0 | 2 | 8 | 10 | 10 | 12 | 60,0 | 116,0 | | | |
| 13. | Karel Balej | G Rokycany | 2 | 2 | 8 | 10 | 10 | 8 | 62,0 | 114,0 | | | |
| 14. | Jan Korovský | G PísnickáPH | -2 | 2 | 8 | 10 | 8 | 10 | 56,0 | 112,0 | | | |
| 15. | Tereza Strižovská | G HroncBa | 1 | 2 | 8 | 10 | 10 | 12 | 40,0 | 106,0 | | | |
| 16. | Anna Holmanová | G SRandyJN | 0 | 6 | 8 | 10 | 10 | 12 | 43,0 | 103,0 | | | |
| 17-18. | Michal Kodad | SPŠ Srdicov | 1 | 2 | 8 | 10 | 10 | 12 | 54,0 | 101,0 | | | |
| | Kateřina Čizková | G Rokycany | 3 | 3 | 8 | 10 | 3 | 12 | 12 | 14 | 59,0 | 100,5 | |
| 19. | Andrej Pařás | G LihoměřPH | 1 | 2 | 8 | 10 | 10 | 12 | 11,5 | 9 | 60,5 | 100,5 | |
| 20-21. | Petr Budač | G JGJ PH | 0 | 2 | 8 | 10 | 10 | 12 | 12 | 7 | 59,0 | 99,0 | |
| | Vincent Orlavský | G TerVans | 2 | 2 | 8 | 10 | 10 | 4 | 52,0 | 99,0 | 8 | 30,0 | 96,0 |
| 22-23. | Vojtěch Břežina | G CombTabor | 0 | 6 | 8 | 10 | 10 | 10 | 12 | 12 | 8 | 33,0 | 95,0 |
| | Dalibor Krmanář | G BO-Rěč | 2 | 2 | 8 | 10 | 10 | 10 | 12 | 12 | 8 | 33,0 | 95,0 |
| 24. | Jakub Uleháč | ŠMAVYzt | 1 | 2 | 8 | 10 | 3 | 12 | 2 | 2 | 2 | 28,0 | 94,0 |
| 25. | Vojtěch Hudec | G CTřebová | 3 | 5 | 8 | 10 | 10 | 10 | 12 | 6 | 45,0 | 89,0 | |
| 26. | Eric Berta | G Vaňto | 2 | 2 | 8 | 10 | 10 | 1 | 12 | 12 | 6 | 42,0 | 88,0 |
| 27. | Jan Vostařel | PČGKarVav | 3 | 3 | 8 | 10 | 3 | 2 | 23,0 | 83,0 | 23,0 | 83,0 | |
| 28. | Jakub Brož | G HonMichael | 4 | 2 | 8 | 10 | 10 | 10 | 18,0 | 82,0 | 18,0 | 82,0 | |
| 29. | Andrej Tomčí | G LihoměřPH | 4 | 5 | 8 | 10 | 10 | 6 | 46,0 | 81,7 | 39,0 | 81,0 | |
| 30. | Davida Nápravnik | G ZborovPH | 3 | 2 | 8 | 10 | 10 | 10 | 39,0 | 81,0 | 40,0 | 80,0 | |
| 31. | Lukáš Čaha | G JungmannLT | 2 | 10 | 8 | 10 | 10 | 12 | 40,0 | 80,0 | 21,0 | 79,0 | |
| 32-33. | Jakub Jirkal | G LihoměřPH | 3 | 6 | 8 | 10 | 10 | 3 | 40,0 | 80,0 | 31,0 | 78,0 | |
| | Jiri Löffelmann | G Těš | 2 | 2 | 8 | 10 | 10 | 10 | 31,0 | 78,0 | 28,0 | 78,0 | |
| 34. | Ondřej Wrezeonko | G BudějovPH | 2 | 2 | 8 | 10 | 3 | 0 | 18,0 | 77,0 | 18,0 | 77,0 | |
| 35-36. | Vojtěch Brož | G CTřebová | 2 | 2 | 8 | 10 | 10 | 10 | 18,0 | 74,3 | 18,0 | 74,3 | |
| | Gabriela Pechlová | G LYNVlt | 1 | 2 | 8 | 10 | 0 | 4 | 27,0 | 74,0 | 27,0 | 74,0 | |
| 37. | Petr Mačačák | GLessZlm | 0 | 2 | 8 | 10 | 5 | 4 | 0 | 0 | 27,0 | 74,0 | |
| 38. | Jaroslav Knappek | G OHradPH | 0 | 6 | 8 | 10 | 3 | 8 | 45,0 | 73,0 | 45,0 | 73,0 | |
| 39. | Martin Bencko | GFXSaldyLI | 3 | 2 | 8 | 10 | 3 | 8 | 12 | 4 | 0 | 0 | 0 |
| 40. | Zuzana Urbanová | | 3 | 2 | 8 | 10 | 3 | 8 | 12 | 4 | 0 | 0 | 0 |

| | <i>řešitel</i> | <i>škola</i> | <i>ročník série</i> | | | | | | <i>série celkem</i> | |
|--------|-------------------|---------------|---------------------|------|------|------|------|------|---------------------|------|
| | | | Z9-1 | Z9-2 | Z9-3 | Z9-4 | Z9-5 | Z9-6 | | |
| 41. | Karel Romanec | SPŠBrumál | 4 | 2 | 8 | 10 | 10 | 8 | 36,0 | 72,0 |
| 42-43. | Robert Jaworski | G ÚstavaPH | -1 | 5 | 8 | 10 | 1 | 12 | 31,0 | 71,0 |
| | Jozef Mikuláš | CZŠBosca | 0 | 2 | 8 | 10 | 10 | 12 | 40,0 | 71,0 |
| 44. | Lucie Vomelová | GSJúšPsa | 1 | 2 | 8 | 10 | 10 | 12 | 29,0 | 69,0 |
| 45. | Tomáš Domes | MendelG.OP | 4 | 4 | 8 | 10 | 10 | 12 | 40,0 | 68,0 |
| 46. | Ondřej Janelský | G Cheb | -1 | 2 | 8 | 10 | 10 | 12 | 52,0 | 65,4 |
| 47-48. | Jaroslav Pařidr | SPŠMasarLI | 3 | 2 | 8 | 10 | 3 | 12 | 53,0 | 65,0 |
| | Rajmund Hruška | G Poškošovice | 4 | 3 | 8 | 10 | 5 | 12 | 0,0 | 65,0 |
| 49. | Kateřina Nová | G Vimperk | 4 | 2 | 8 | 10 | 10 | 12 | 35,0 | 63,0 |
| 50-51. | Praňišek Kmpěč | G Brandýs | 1 | 2 | 8 | 10 | 10 | 12 | 44,0 | 62,0 |
| | Barbora Plačková | G Hru | -1 | 2 | 8 | 10 | 10 | 12 | 30,0 | 62,0 |
| 52. | Ondřej Kriščka | G JarosBO | 1 | 5 | 8 | 10 | 10 | 2 | 0,0 | 61,0 |
| 53-55. | Radoslav Hašek | G Čáslav | 3 | 6 | 8 | 10 | 10 | 2 | 20,0 | 60,0 |
| | Dominik Plyný | G Ostrav | 2 | 2 | 8 | 10 | 10 | 60,0 | 60,0 | |
| | Martin Sobotka | G LihoměřPH | 1 | 1 | 8 | 10 | 10 | 12 | 8 | 60,0 |
| 56-60. | Daniela Hrbáčková | G Wicht | 3 | 2 | 4 | 1 | 1 | 2 | 20,0 | 58,0 |
| | Vojtěch Káně | G Brandýs | 1 | 1 | 6 | 10 | 10 | 2 | 18,0 | 58,0 |
| | Pavel Martinec | GLessZlm | 3 | 4 | 8 | 10 | 10 | 18,0 | 58,0 | |
| | Filip Masár | PřaGNTira | 3 | 1 | 8 | 10 | 10 | 0,0 | 58,0 | |
| | David Oravec | G DubNVáh | 2 | 2 | 8 | 10 | 3 | 18,0 | 58,0 | |
| 61. | Josef Polášek | G KeplerAPH | 1 | 2 | 8 | 10 | 10 | 10 | 55,7 | 55,7 |
| 62. | Jan Kaifer | G ČesBrod | 1 | 1 | 8 | 10 | 8 | 0,0 | 55,0 | 55,0 |
| 63. | Ondřej Čach | SPSE_Pard | 1 | 5 | 8 | 10 | 10 | 54,0 | 54,0 | 54,0 |
| 64. | Michal Mlčoch | G UherBrod | 2 | 3 | 8 | 10 | 10 | 0 | 28,0 | 52,0 |
| 65-66. | Jan Kutěra | GFKrželka | 0 | 2 | 8 | 10 | 3 | 21,0 | 49,0 | 49,0 |
| | Ladislav Týpfer | G DrPekMB | 2 | 2 | 0 | 10 | 10 | 10,0 | 46,0 | 46,0 |
| 67-69. | Jan Chybk | SPŠMasarLI | 0 | 6 | 8 | 10 | 10 | 18,0 | 46,0 | 46,0 |
| | Vojtěch Kuchař | ZŠ Sobotka | 0 | 2 | 8 | 10 | 10 | 18,0 | 46,0 | 46,0 |
| | Martin Zmitko | G PýčlínOs | 1 | 2 | 8 | 10 | 10 | 18,0 | 46,0 | 46,0 |
| 70-71. | Janek Hlavatý | G JirskaČB | -2 | 11 | 8 | 10 | 8 | 26,0 | 44,0 | 44,0 |
| | Martin Hofbauer | G BO-Rěč | 2 | 3 | 8 | 10 | 10 | 18,0 | 44,0 | 44,0 |
| 72-73. | Timex Széllósová | G Gröss_BA | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0,0 | 41,0 | 41,0 |
| 74-79. | Matouš Vondrášek | G HroncCB | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0,0 | 40,0 | 40,0 |
| | Martin Horáček | G Šumprek | 4 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0,0 | 40,0 | 40,0 |
| | Adam Pernay | G HroncBa | 3 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0,0 | 40,0 | 40,0 |
| | Dennis Pražák | G JirskaČB | 2 | 5 | 8 | 10 | 10 | 18,0 | 40,0 | 40,0 |
| | Tomáš Sládek | G HroncBa | 2 | 2 | 8 | 10 | 10 | 14,0 | 38,0 | 38,0 |
| | Jakub Szymaska | GmGy PV | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0,0 | 40,0 | 40,0 |
| | Vít Beran | MasG_Přeň | 3 | 2 | 4 | 10 | 0 | 4,0 | 38,0 | 38,0 |
| | Jan Stěcha | G JirskaČB | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 14,0 | 38,0 | 38,0 |
| | Michael Kozel | G ZborovPH | 3 | 3 | 8 | 10 | 10 | 8,0 | 36,0 | 36,0 |
| | Magdaléna Rydlová | GLessZlm | 3 | 2 | 8 | 10 | 10 | 18,0 | 36,0 | 36,0 |
| | Václav Černák | G Klárovy | 4 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0,0 | 34,0 | 34,0 |
| 85. | Radim Burán | G UherBrod | 2 | 2 | 8 | 10 | 10 | 2 | 30,0 | 30,0 |
| 86-89. | Jan Bíl | GDVstáČPA | 4 | 1 | 8 | 10 | 10 | 2 | 30,0 | 30,0 |
| | Tomáš Duřava | G MarOS | 3 | 1 | 1 | 1 | 1 | 12 | 30,0 | 30,0 |
| | Eric Rehnka | SPMNDPaGB | 4 | 1 | 8 | 10 | 10 | 18,0 | 30,0 | 30,0 |
| | Vladimír Hojý | ČiřG_Přeň | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1,0 | 29,0 | 29,0 |
| | Jaroslav Horáček | BiGyBBHK | 4 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0,0 | 28,0 | 28,0 |
| | Lucie Kubičková | GFXSaldyLI | 3 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0,0 | 28,0 | 28,0 |
| | Tomáš Nguyen | SPŠÚzlabPH | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0,0 | 28,0 | 28,0 |
| | Ardla Navratová | ZŠ MTYš | -1 | 1 | 0,0 | 28,0 | 0,0 | 28,0 | 28,0 | 28,0 |
| | Ondřej Portáček | G GolNhra | 3 | 3 | 0,0 | 28,0 | 0,0 | 28,0 | 28,0 | 28,0 |
| | Vojtěch Poupá | ČiřG_Přeň | -1 | 1 | 0,0 | 28,0 | 0,0 | 28,0 | 28,0 | 28,0 |
| | Adrián Rošinec | G HorMihal | 4 | 1 | 2 | 2 | 0,0 | 28,0 | 28,0 | 28,0 |
| | Eliška Vřeinská | G Hladov | 0 | 1 | 0,0 | 28,0 | 0,0 | 28,0 | 28,0 | 28,0 |
| | Tomáš Vitek | G Břeclav | 0 | 1 | 0,0 | 28,0 | 0,0 | 28,0 | 28,0 | 28,0 |
| | Beneditkt Zour | G UherBrod | 2 | 2 | 8 | 10 | 4 | 4,0 | 28,0 | 28,0 |
| 102. | Jiří Janoušek | G BudějovPH | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2,0 | 27,0 | 27,0 |
| 103. | Jan Martinek | G TomskaOL | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0,0 | 26,0 | 26,0 |