Lineární algebra

Jan Kubálek a Tereza Ptáčková

Matematicko-fyzikální fakulta Univerzity Karlovy v Praze

Podzim 2012

Historie

- 8.-9. století
- perský matematik Al-Choresmí
- kniha Al-kitáb Al-džabr
    - kniha pojednává o lineárních a kvadratických rovnicích
    - zde se objevuje slovo „algebra“

Vektorové prostory

- Příkladem buďte vektorové prostory $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}$
- Aritmetické operace s vektory:

$$\mathbf{v} = (\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2)\,;\, \mathbf{u} = (\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2)$$

  - Sčítání vektorů:
    $\mathbf{v} + \mathbf{u} = (\mathrm{v}_1 + \mathrm{u}_1, \mathrm{v}_2 + \mathrm{u}_2)$
  - Násobení vektoru číslem:
    $\lambda\mathbf{v} = (\lambda\mathrm{v}_1, \lambda\mathrm{v}_2)$

Transformace souřadnic

- Každý bod v kartézském systému mužeme chápat jako vektor, který na tento bod „ukazuje“
- Transformace v rovině
  - zrcadlení
  - rotace okolo počátku o $\frac{\pi}{2}$

Transformace souřadnic

- Pozorujeme, že každou z uvedených transformací lze přepsat do tvaru
$$\begin{aligned} x' &= Ax + By \\ y' &= Cx + Dy \end{aligned}$$
- v přehlednějším zápisu

$$\begin{pmatrix} Ax + By \\ Cx + Dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

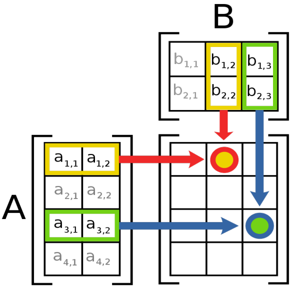
Definice matice

Maticí nazveme obdélníkové schéma prvků

Násobení matic

Nechť je dána matice A typu $\mathrm{n} \times \mathrm{m}$ a matice B typu $\mathrm{m} \times \mathrm{p}$. Pak jejich součinem $(\mathrm{A} \cdot \mathrm{B})$ vznikne nová matice typu $\mathrm{n} \times \mathrm{p}$ a platí pro ni:

$$(\mathrm{A} \cdot \mathrm{B})_{\mathrm{ij}} = \sum_{\mathrm{r}=0}^{\mathrm{m}} \mathrm{a}_{\mathrm{ir}} \mathrm{b}_{\mathrm{rj}}$$



[zdroj: en.wikipedia.org]

Lineární zobrazení

- Lineární funkcí budeme rozumět funkci $\mathcal{F} : \mathrm{V} \rightarrow \mathrm{V}$ pro kterou platí

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\lambda \mathbf{u}) &= \lambda \mathcal{F}(\mathbf{u}) \\ \mathcal{F}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= \mathcal{F}(\mathbf{u}) + \mathcal{F}(\mathbf{v}) \end{aligned}$$

- Každou lineární funkci lze reprezentovat maticí

Skládání lineárních zobrazení

- Nechť funkce $\mathcal{F}_1$ a $\mathcal{F}_2$ jsou lineární. Pak složením $\mathcal{F}_1$ s $\mathcal{F}_2$ vznikne nová funkce $\mathcal{H}$ pro niž platí

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}) = \mathcal{F}_1(\mathcal{F}_2(\mathbf{x}))$$

popřípadě v jiném značení

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}) = (\mathcal{F}_1 \circ \mathcal{F}_2)(\mathbf{x})$$

- Skládání dvou lineárních funkcí je ekvivalentní násobení jejich matic

Báze vektorového prostoru

- Máme vektor $(5,3)$ náležící $\mathbb{R}^2$.
- Můžeme ho rozložit na součet dvou vektorů

$$(5,3) = 5 \cdot (1,0) + 3 \cdot (0,1)$$

- Vektor z $\mathbb{R}^2$ tedy můžeme napsat jako součet dvou jednotkových vektorů vynásobených příslušnými čísly
- Podobně vektor z $\mathbb{R}^n$ můžeme napsat jako součet n jednotkových vektůrků vynásobených příslušnými čísly

Báze vektorového prostoru

Bází vektorového prostoru budeme rozumět nejmenší množinu vektorů, na které lze každý vektor z daného vektorového prostoru rozepsat

Rotace kolem souřadnicové osy

Rotace kolem osy Z?

$$\begin{aligned} \mathrm{x}' &= \mathrm{x} \cdot cos\alpha + \mathrm{y} \cdot sin\alpha \\ \mathrm{y}' &= -\mathrm{x} \cdot sin\alpha + \mathrm{y} \cdot cos\alpha \end{aligned}$$

v maticovém zápisu

$$\begin{pmatrix} \mathrm{x}' \\ \mathrm{y}' \\ \mathrm{z}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\alpha & sin\alpha & 0 \\ -sin\alpha & cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{x} \\ \mathrm{y} \\ \mathrm{z} \end{pmatrix}$$

- Rotaci kolem každé osy můžeme zapsat jako $\mathbf{u}' = \mathrm{A} \cdot \mathbf{u}$
- Matici lze reprezentovat jako lineární funkci
- Složením rotace kolem osy Z a rotace kolem osy Y vznikne?

$$\mathcal{F}_z(\mathbf{u}) = \mathrm{A_z} \cdot \mathbf{u} \quad \mathcal{F}_y(\mathbf{v}) = \mathrm{A_y} \cdot \mathbf{v}$$

$$\mathcal{F}_z(\mathcal{F}_y(\mathbf{x})) = \mathrm{A_z} \cdot \mathrm{A_y} \cdot \mathbf{x}$$

Děkuji za pozornost

Dotazy?