JKSP-1 Lámání čokolády — 60 bodů

Rektor Magma kdysi dávno svým kolegům přinesl čokoládu s kamínky o rozměrech $R \times S$. Dříve, než ji rozdělil mezi kolegy, ji ale nasekal kamennou sekyrou.

Na jaký nejmenší počet seknutí může čokoládu nasekat na jednotlivé dílky?

(Jedno seknutí znamená vzít jeden obdélníkový dílek a rozseknout jej na dva menší.)

JKSP-2 Dláždění auly — 60 bodů

Rektor Kamenné univerzity objednal čtvercové kamenné dlaždice na podlahu nové auly. Aula bude mít tvar obdélníku a dlaždice budou naskládány v její podlaze do mřížky. Všechny dlaždice jsou stejně velké a žádné dlaždice nesmí zbýt.

Kdyby univerzita měla 12 dlaždic, měli bychom tři možnosti, v jakém tvaru aulu postavit: 1×12, 2×6, nebo 3×4. Pro 12 dlaždic je tedy správné řešení 3.

Kolik tvarů může mít aula, pokud univerzita objednala 189 000 dlaždic?

---

64 ($189\,000 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7$*, počet dělitelů je 128, podělíme dvěma)*

JKSP-3 Burza — 60 bodů

Kamenná burza směňuje kameny, oblázky a pazourky. Jeden oblázek směňuje za 7 kamenů a jeden pazourek za 11 kamenů. Například: kdybychom chtěli získat 29 kamenů, můžeme je získat směnou za 2 pazourky a 1 oblázek. Oproti tomu ale není možné směnou za pazourky a oblázky dostat 15 kamenů.

Jaké je největší množství kamenů, které nedokážeme získat výměnou za pazourky a oblázky?

59, přes zaplatitelné zbytky po dělení 7.

JKSP-4 Kamenologie — 60 bodů

Oddělení kamenologie vysokých energií testuje obecnou teorii kamenicity pomocí vysokorychlostního srážení kamenů. Na provedení jednoho testu potřebuje x kamenů. Kameny si vyžádává ze skladu, jehož předpisy umožňují vydávat je jenom po balících y kamenů.

Profesor Kamenec se rozhodl, že chce při svých testech zničit aspoň A, ale nejvýš B kamenů. Kolik má možností, jaké množství kamenů si vyžádat ze skladu?

Vaším úkolem je vymyslet algoritmus, který pro každé konkrétní x, y, A a B odpoví co nejrychleji.

Příklad: když je na jeden test potřeba $x = 2$ kamenů a jeden balík obsahuje $y = 3$ kamenů a chceme zničit mezi 10 a 17 kameny, můžeme jich zničit jenom 12, tedy máme 1 možnost.

Nejmenší společný násobek. Chceme, aby popsali, jak se počítá, a i časovou složitost ($\mathcal{O}(\log N)$ *operací).*

JKSP-5 Krásný šutry — 60 bodů

Je zadán strom s N vrcholy a vyznačeným počátečním vrcholem x. V každém vrcholu je určitý počet krásnejch šutrů.

Navrhněte algoritmus, který nalezne cestu z x do libovolného listu takovou, že cestou posbíráme co nejvíc krásnejch šutrů. Algoritmus musí být efektivní na vstupech s $N \leq 100\,000$.

$\mathcal{O}(N)$*, cesta do kořene plus do listu.*

JKSP-6 Přesmyčky — 60 bodů

Jsou dána dvě slova délky N složená z malých písmen anglické abecedy. Navrhněte algoritmus, který rozhodne, zda je jedno slovo přesmyčkou druhého.

Nechť je váš algoritmus efektivní pro vstupy s $N \leq 100\,000$.

JKSP-7 Setříděná posloupnost — 60 bodů

Máme setříděnou posloupnost N čísel. Najděte mezi nimi dvě čísla, jejichž vzdálenost na číselné ose je nejbližší číslu K, přičemž ta čísla nemusí stát v posloupnosti vedle sebe. Pokud existuje víc takových dvojic, stačí najít libovolnou z nich. Navrhněte pro to co nejefektivnější algoritmus.

Příklad: Mějme posloupnost 1, 5, 7, 13, 15 a $K = 5$. Pak vzdálenost 7 a 13 je 6, to je od K stejně daleko jako 1 od 5. Řešením jsou tedy buďto čísla 1 a 5, nebo 7 a 13.

Řešení v $\mathcal{O}(N)$, viz 26-Z2-5.

JKSP-8 Sčítání — 60 bodů

Dostanete zadané číslo N. Vypište všechny způsoby, jak N poskládat pomocí sčítání. Na pořadí sčítanců nezáleží.

Ukázkový vstup:

```
5
```

Ukázkový výstup:

```
1+1+1+1+1
1+1+1+2
1+1+3
1+2+2
1+4
2+3
5
```

21-3-5 Soucty

Chceme popis toho, proč to řešení ignoruje permutaci sčítanců, možná s pseudokódem pokud by bylo vysvětlení moc vágní.

JKSP-9 Kamenování — 60 bodů

Proděkan Žula se baví skládáním nekonečné posloupnosti černých a bílých kamenů. Jeho první krok bylo, že položil černý kámen. V každém dalším kroku se podívá na posloupnost, kterou už poskládal, a přidá její kopii na konec, akorát v kopii prohodí černé a bílé kameny.

Začal tedy s černým kamenem. Pak měl černý kámen a bílý kámen. Pak černý, bílý, bílý, černý. Pak černý, bílý, bílý, černý, bílý, černý, černý, bílý. A pokud ho to nepřestalo bavit, skládá kameny dodnes.

Ve výsledné posloupnosti tedy bude kámen číslo 1 černý a třeba kámen číslo 5 bude bílý. Na vstupu dostanete číslo x. Vaším úkolem je zjistit barvu x-tého kamene.

$\mathcal{O}(\log N)$, *přes binární zápis.*

JKSP-10 Ohniště — 60 bodů

Ohniště je konvexní mnohoúhelník. Dostanete zadané souřadnice jeho vrcholů v kartézské soustavě (tedy dvě racionální čísla – souřadnice x a y), seřazené po směru hodinových ručiček. Vaším úkolem je spočítat obsah ohniště.

Příklad: ohniště s vrcholy (0, 0), (0, 1), (1, 0) má obsah 0.5.

$\mathcal{O}(N)$

JKSP-11 Procházka — 60 bodů

Pozemky univerzity jsou mřížka velikosti $N \times N$. Každé políčko je buď zastavěné, nebo prázdné. Půjdeme se po pozemcích projít. Začneme v severozápadním rohu pozemku a jdeme do jihovýchodního rohu. Každý náš krok povede buď do políčka na východ, nebo do políčka na jih. Můžeme vstoupit jenom do prázdných políček. Spočítejte, kolika způsoby se můžeme projít ze severozápadu na jihovýchod.

Dynamické programování.

JKSP-12 Pěšinky — 60 bodů

Objednané kameny z dolu dopravujeme po pěšinkách. Každá pěšinka spojuje dvě křižovatky. Křižovatek je N a pěšinek je M. Důl je křižovatka číslo 1, cíl (Kamenná univerzita) je křižovatka číslo N. Ke každé pěšince dostanete čísla dvou křižovatek, které spojuje, a také druh pěšinky. Pěšinky jsou krátké, normální a dlouhé. Projít krátkou pěšinku zabere 1 hodinu, střední 2 hodiny a dlouhou 3 hodiny.

Najděte co nejrychlejší cestu mezi dolem a Kamennou univerzitou. Snažte se cestu najít co nejrychleji.

BFS, $\mathcal{O}(3 \cdot N)$. Chceme taky vysvětlit, jak z vzdáleností rekonstruovat cestu.

JKSP-13 Špionáž — 60 bodů

Od konkurenční univerzity jsme získali plány k důležitému objevu. Bohužel nerozumíme jejich matematice. Konkrétně nevíme, v jaké číselné soustavě počítají. Našli jsme ale zápis, který určitě znamená, že v jejich soustavě pro nějaké 3 zápisy čísel (tedy řetězce znaků 0 až 9 a a `a` až `z` – 10 až 36) A, B a C platí $A + B = C$.

Vaším úkolem je vymyslet co nejrychlejší algoritmus, který dostane tuto rovnici a určí základ soustavy, ve které platí. Pokud základ soustavy není jednoznačně určen, vypište soustavu s nejmenším základem, která rovnici vyhovuje.

Ukázkový vstup:

```
A=1
B=1a
C=20
```

Ukázkový výstup:

```
11
```

15-1-4 Soustavy

$\mathcal{O}(N)$. Jdeme odzadu od nejmene vyznamne cislice. Najdeme prvni pripad kdy dojde k prenosu ($A_i + B_i \neq C_i$) a podle neho odvodime, jak je velky zaklad soustavy (protoze $A_i + B_i = C_i - z$, kde z je zaklad soustavy).

JKSP-14 Kameny — 60 bodů

Profesor Kamenec se šel projít a po cestě sbíral kameny. Pokaždé, když se zastavil, buď nabral nějaké bílé kameny, nebo nějaké černé kameny. Dostanete na vstupu posloupnost zastávek s počty nasbíraných kamenů, například $B1, Č2, Č5, B1, B1, B1, B1, B1, Č1, Č7$. Vaším úkolem je najít nejdelší souvislý úsek cesty, ve kterém profesor Kamenec nasbíral více bílých kamenů než černých. Například úsek $Č5, B1, B1, B1$ není platný, protože v něm profesor Kámen nasbíral 3 bílé kameny a 5 černých, což je víc. V našem příkladu by správné řešení byl úsek $B1, B1, B1, B1, B1, Č1$.

17-4-3 Phirma

Ocekavana slozitost: O(N), dynamické programování

JKSP-15 Parcela — 60 bodů

Univerzita teď hledá ke stavbě nové auly vhodné místo. Pozemek univerzity je pořád mřížka velikosti $N \times N$ a každé políčko v ní je buď zastavěné, nebo prázdné. Aula bude v této mřížce obdélník velikosti $X \times Y$ a je možné ji postavit jenom na prázdných políčkách. Aula může být orientována buď severo-jižně, nebo západo-východně.

Na vstupu dostanete popis tvaru auly a mapu, která políčka univerzitních pozemků jsou použitelná a která jsou nepoužitelná. Vaším úkolem je co nejrychleji spočítat počet různých obdélníků, na kterých může aula stát.

Čas i paměť $\mathcal{O}(N^2)$. Spočítají se 2D prefixové součty v $\mathcal{O}(N^2)$ a pak se v $\mathcal{O}(N^2)$ zkontroluje každé políčko, jestli je levý horní roh zaplněného čtverce.

JKSP-16 Signály — 60 bodů

Kouřovými signály jsme dostali zprávu v morseovce. Bohužel jsme se nedohodli na oddělovačích, takže zpráva došla jenom jako tečky a čárky a nevíme, kde jsou hranice písmen.

Víme však, že se zpráva může skládat jenom z některých slov. Na vstupu dostanete tato slova a zprávu. Najděte způsob, jak zprávu rozdělit na písmena a slova, aby slov bylo nejméně.

Příklad: Slovník obsahuje slova attack, diet, indemnify, knights, pig, send, sets, the, zombie a dostali jsme následující zprávu: ....-.-..-.....-.--...--.....-...

Správný překlad je: „send the knights“. Zprávu je ještě možné přeložit jako „send diet pig sets“, avšak takový překlad je o slovo delší, takže to není správné řešení.

20-2-3 Morzeovkabezoddělovačů

Dynamické programování odzadu. Slovník si reprezentujeme jako trii. Čas $\mathcal{O}(N \cdot L)$, kde L je délka nejdelšího slova ve slovníku. Akceptovat i řešení bez trie. (Pak jde složitost třeba $\mathcal{O}(N \cdot (L \cdot K))$, kde K je počet slov ve slovníku.)

Neakceptovat exponenciální řešení.

JKSP-17 Výlet — 60 bodů

Jdeme na výlet v horách. Když dojdeme na vrchol nebo sejdeme dolů, zapíšeme si svoji nadmořskou výšku. Mezi dvěma zapsanými nadmořskými výškami jdeme buď jenom do kopce, nebo jenom z kopce. Nadmořské výšky jsou přirozená čísla od 1 do L.

Například: když jsme si zapsali 100, 300, 200, 400, tak jsme začali ve výšce 100 metrů, pak jsme stoupali do výšky 300 metrů, pak klesali do 200 metrů a pak zase stoupali do 400 metrů.

Zapsali jsme si N nadmořských výšek (kde N je mnohem větší než L – například $L = 100$, $N = 10\,000$). Najděte některou z nadmořských výšek, kterou jsme navštívili nejvícekrát. Například pro záznamy 100, 300, 200, 400 je správná odpověď libovolné číslo mezi 200 a 300.

Součtový intervalový strom. Jedna operace je inkrementování intervalu. $\mathcal{O}(N \log L + L)$

JKSP-18 Studijní — 60 bodů

Na studijním oddělení Kamenné univerzity má každý úředník kamennou desku s formuláři, které má za úkol zpracovat. Studijní proděkan Slída zavedl pravidlo, že každý úředník má právě jednoho kolegu, kterému předává desky, a právě jednoho kolegu, od kterého desky dostává, a to proto, aby práce moc nestála. Ke střídání desek dochází každý den. (Přitom se může stávat, že někdo předává desky sám sobě, také tam může existovat více nezávislých cyklů.)

Víte, komu který úředník předává desky. Určete, po kolika dnech se desky vrátí svým původním majitelům.

19-4-2 Byrokratický aparát. Je to po NSN délek všech cyklů.