Milí řešitelé a řešitelky!

Držíte v ruce třetí leták 24. ročníku KSP. Každá série letos obsahuje 8 úloh a z nich se 5 nejlépe vyřešených započítává do celkového bodového hodnocení.

Nově je možno být přijat na MFF UK za úspěšné řešení KSP. Úspěšným řešitelem se stává ten, kdo získá za celý ročník alespoň 50 % bodů. Za letošní rok půjde získat maximálně 300 bodů, takže hranice pro úspěšné řešitele je 150.

Upozorňujeme letošní maturanty, že termín odevzdání páté série bude příliš pozdě na to, aby pátou sérií doháněli chybějící body. Diplom úspěšného řešitele ale můžeme v případě potřeby zaslat i dříve, budete-li mít dost bodů.

Termín odevzdání třetí série je stanoven na **pondělí 13. února** v 8:00 SEČ, což znamená, že papírové řešení byste měli podat na poštu do středy 8. února, aby nám stihlo přijít. CodExová úloha má termín o den posunutý, protože nám ji opravuje automat – 14. února v 8:00.

Řešení přijímáme elektronicky na stránce *https://ksp.mff.cuni.cz/submit/*. Chcete-li s námi komunikovat bezpečně, můžete si ověřit náš HTTPS certifikát – zde je jeho SHA1 hash: `7F:53:E7:00:60:F2:24:93:8F:52:51:EC:1E:A8:34:54:86:69:32:7D`.

Také nám řešení můžete poslat klasickou poštou na adresu

Korespondenční seminář z programování
KSVI MFF UK
Malostranské náměstí 25
118 00 Praha 1

Třetí série čtyřiadvacátého ročníku KSP

Odpadla poslední cihla a archeolog-dobrodruh se konečně dostává do hrobky, kde na něj čeká hora pokladů. Ouha, při vší nedočkavosti došlápne na špatný panel na zemi a jakoby odnikud se na něj valí obří balvan...

O čem asi dnešní příběh bude? O archeologii? Brakové literatuře? Tak alespoň o sférických objektech? Kdepak, o té nejzajímavější *části minulého odstavce, o vstupních zařízeních. Hlavně o těch, co se dají zapojit do našeho nejlepšího kamaráda – počítače.*

Pokud vás téma nenadchlo, soucítíme s vámi. Zde je úloha na usmířenou.

24-3-1 Intervalové duplicity — 12 bodů

Máme posloupnost přirozených čísel délky N. Na vstupu kromě této posloupnosti dostaneme také K dotazů – intervalů. Máme rozhodnout pro každý dotaz zvlášť, jestli se v intervalu čísel ze zadané posloupnosti opakuje alespoň jedna hodnota.

Tato úloha je praktická a řeší se ve vyhodnocovacím systému CodEx.[1] Přesný formát vstupu a výstupu, povolené jazyky a další technické informace jsou uvedeny v CodExu přímo u úlohy.

Pokud přeskočíme pár tisíciletí a podíváme se do 30. let 19. století, možná nás překvapí, že spolu s Babbageovým známým Analytickým strojem už byly vynalezeny jak děrné štítky, tak klávesnice – tehdy ovšem ještě odděleně, klávesnice jako součást pouze prvních psacích strojů. Děrné štítky nejprve sloužily jako instrukce jednoduchým automatům (jako samohrajícím pianům na Divokém západě).

Psací stroje se začaly více prodávat a šířit až někdy v 60. a 70. letech 19. století, kdy také vzniklo dnes takřka standardní rozložení kláves QWERTY. Počítače na svůj vzestup ještě čekaly a tehdejší prototypy byly stále ovládány děrnými štítky.

Děrné štítky nakonec na svůj soumrak čekají dlouhou dobu – informatici na Matfyzu jsou stále strašeni historkami o ladění programů zadávaných pomocí děrných štítků. Příliš flexibilní vstupní zařízení to vskutku nebyla.

Klávesnice se u počítačů (po experimentech ve 40. letech 20. století) objevily až v 60. letech, společně s prvními video terminály (na počítačích MULTICS). Poměrně rychle vytlačovaly děrné štítky, neboť to bylo vylepšení opravdu podstatné. Tedy, alespoň tam, kde na novější počítače byly peníze.

24-3-2 Nemnoho počítačů — 10 bodů

V jedné méně bohaté společnosti mají N počítačů, kde každý počítač má přiřazeno přirozené číslo – typ počítače. Dozvěděli jsme se, že firma vlastní maximálně $\log_2 N$ různých druhů počítačů (tedy je na vstupu jen $\log_2 N$ různých hodnot).

Naším úkolem je vymyslet algoritmus, který za takovéto podmínky setřídí N čísel (typů počítačů) ze vstupu co nejrychleji.

Například vstup `3 2 4 4 2 3 4 2` má jen 3 různé hodnoty, což je $\log_2 8$.

Setříděná posloupnost je potom `2 2 2 3 3 4 4 4`.

I na klávesnicích samotných se zrcadlil rychlý vývoj 20. století. Psací stroje používaly kladívka, která se po stisku klávesy obtiskla na papíře. Při vyšších rychlostech psaní se však kladívka často zasekávala, což neúměrně zpomalovalo psaní. Proto prý vzniklo rozložení QWERTY – cílem bylo minimalizovat počet stisků kláves blízko u sebe (což bylo hlavní příčinou zasekávání).

První klávesnice zapojené do počítače byly prostě jen namačkané přepínače na sobě, každý pro jednu klávesu zvlášť. Takové řešení však bylo příliš drahé a tehdy také hůře použitelné.

Poměrně rychle bylo tedy vynalezeno dnes nejčastější řešení – membránové klávesy s gumovými čepičkami, které po stisku spojí desku s tištěnými spoji dole s grafitovou částí uvnitř, což vyšle signál pro danou klávesu.

[1] `http://ksp.mff.cuni.cz/zaciname/codex.html`

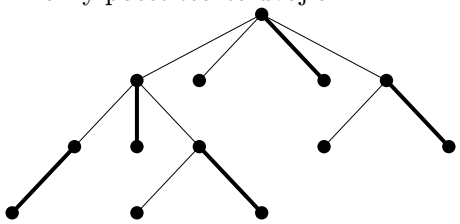
Druhý nejčastější typ kláves jsou nůžkové spínače, které jsou založeny opět na gumové membráně a jejím stisku, ovšem stisku napomáhají křížící se podpěry s malou volností, díky čemuž klávesy nepotřebují tak velký prostor a zdají se placatějšími.

Tyto klávesy jsou časté u laptopů a také u některých výrobců stolních klávesnic. Oba dva hlavní typy klávesnic jsou velmi levné, a tak většina populace zná jen tyto.

24-3-3 Párování znalců — 10 bodů

Vrátili jsme se do naší hypotetické firmy a nyní koukáme na hierarchii zaměstnanců a jejich šéfů. Každý zaměstnanec (kromě ředitele) má jednoho přímého nadřízeného, ředitel šéfuje celé firmě a ve firmě nejsou žádní lidé, co by si byli navzájem šéfem i podřízeným. (Jinak řečeno, zaměstnanci tvoří strom.)

Kvůli kurzu psaní všemi deseti potřebujeme rozdělit zaměstnance do co nejvíc nepřekrývajících se dvojic tak, že ve dvojici je vždy jeden zaměstnanec a jeho přímý nadřízený. Nalezněte algoritmus, který pro danou firmu spočítá maximální možný počet těchto dvojic.



Jaké další typy klávesnic ti „znalci“ vlastně znají? Kromě membránových klávesnic existují ještě klávesnice, kterým se říká mechanické. Tyto klávesnice sice také často využívají membránové čepičky, ale často je kombinují s jinými technologiemi, které mají za cíl vyvážit nevýhody membránových klávesnic.

Za hlavní nevýhodu je považována velmi malá odezva kláves, takže pisatel musí vyvinout větší tlak na klávesu, aby ji stiskl.

Mezi tyto klávesnice patří například jejich hlavní zástupce, mechanické spínačové klávesnice, které podobně jako jejich předkové používají spínač pro každou klávesu zvlášť, v kombinaci s pružinkou a zvukovou odezvou po stisknutí. Dále k nim řadíme také kapacitní klávesnice a klávesnice s ohýbající se pružinkou.

Ačkoli klávesnicoví gurmáni mnohdy preferují mechanické klávesnice nad těmi levnými, jejich skutečné výhody mohou být hodně subjektivní a hlavně malé v porovnání s řádově vyšší cenou klávesnice.

I u membránových klávesnic existují kvalitní produkty s rozumnou odezvou i cenou – je třeba být pyšný na českou firmu ZF Electronics Klášterec s.r.o, výrobnu kvalitních jak membránových, tak mechanických klávesnic v ČR.

Ironií ovšem je, že ačkoli se klávesnice stále vyrábí, většina jejich produktů není dostupná na českém trhu a musíte je dovézt například ze sousedního Německa či Rakouska.

Mechanické klávesnice (hlavně díky své vysoké ceně) tedy nezískaly na popularitě a byly zcela poraženy jejich levnějšími bratránky, zatímco jiné oblasti práce s počítačem (grafické prvky, zvuk) si udržely na trhu kvalitní produkty díky použitelnosti v profesionální sféře.

Až bude soused vyhazovat svoji starou klávesnici z 90. let, raději se na ni běžte podívat – mnohdy lidé našli v sousedství starou klávesnici IBM, která se pak dala prodat za pěkný peníz na internetu.

24-3-4 Návrat do podposloupnosti — 12 bodů

Představme si na chvíli, že jsme firmou IBM a držíme v ruce seznam všech našich verzí klávesnic. Verze jsou vlastně přirozená čísla. Občas ale proběhne v IBM reorganizace, a tak posloupnost čísel verzí nemusí být rostoucí.

Zajímalo by nás, jakou nejdelší souvislou rostoucí podposloupnost čísel verzí klávesnic v seznamu najdeme. Avšak nejsme jen obvyklá firma, jsme IBM – máme ve skladu stroj času na jedno použití. Můžeme se tedy vrátit v čase a jeden souvislý úsek verzí (rostoucí nebo ne) prostě ze seznamu škrtnout – a pak hledat nejdelší souvislou rostoucí podposloupnost čísel ve zbytku.

Vymyslete algoritmus, který nám v tomto hledání pomůže. Pokud existuje více řešení, vypište libovolné z nich.

Například pro seznam `1 4 7 2 3 5 9 1` vyškrtneme část `4 7` a dostaneme tak rostoucí souvislou podposloupnost `1 2 3 5 9`.

A tak mnoho z nás píše na levných klávesnicích a jsme šťastni ve zdraví. Nebo nejsme? Syndrom karpálního tunelu je skutečná záležitost, a přestože mnoho z nás se stále těší dobrému ručnímu zdraví, autor tohoto článku nedoporučuje pohodlí při psaní zanedbat.

Jste-li pyšní na to, jak rychle píšete, může se vám lehce stát, že za pár let pyšní nebudete – možná ve svých 40 letech už nebudete moci psát vůbec.

Nicméně neznamená to, že musíte hned přejít na pohodlnější klávesnici. Existuje třída klávesnic, které se snaží zachránit pisatelům ruce, nazývají se ergonomické.

Z osobní zkušenosti mohu potvrdit, že na některých se opravdu píše pohodlněji. Stejně jako u mnoha jiných nemocí ovšem není zcela prokázáno, že syndrom karpálního tunelu je tvořen psaním na špatné klávesnici a že ergonomické klávesnice mají jakýkoli prospěšný efekt.

Budete-li přemýšlet nad svým zdravím, zamyslete se hlavně nad tím, jak u počítače sedíte a na jaké židli.

24-3-5 Součin zlomků — 10 bodů

Nelamte si u počítače páteř, zkuste si radši zlámat pár zlomků. Na vstupu máte seznam racionálních čísel – zlomků zapsaných v základním tvaru. Vaším úkolem je zlomky vynásobit a vypsat výsledek opět v základním tvaru.

Pozor, zlomků může být hodně a přestože se každé číslo na vstupu i výsledek vejdou do celočíselného datového typu, už neplatí, že by se každý mezivýsledek musel do takového typu vejít. Celý vstup se také do paměti vejde.

Například na vstup `17/63 100/99 81/85 77/20` vypíšete výstup `1` nebo `1/1`. Vstup i výstup má jistě čitatele i jmenovatele menší než bajt, nicméně po vynásobení prvních dvou členů získáme `1700/6237`...

Nejen klávesnicemi vstupuje člověk do počítače. V 70. letech vzniklo další dnes všudypřítomné vstupní zařízení – myš. K zrodu myši se váže tato anekdota:

Když Steve Jobs přijel do vývojového střediska Xeroxu v Palo Alto, ukázali mu tam třítlačítkové zařízení za 300 dolarů – myš. Byl jí tak unesen, že se rozhodl myši dodávat ke svým počítačům Apple.

Apple v té době ovšem neprodával předražené produkty, takže se jim podařilo zjednodušit původní myš od Xeroxu a snížit cenu za 15 dolarů, což byl první odraz myši do světa (stolních) počítačů.

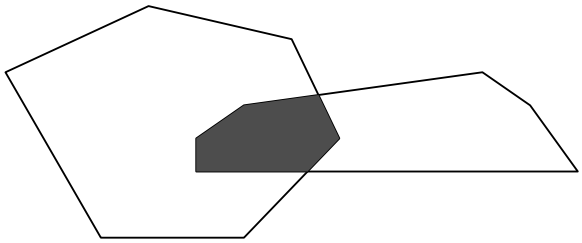
Přiznejme si, že toto vše trochu minulo český trh, neboť po revoluci v roce 1989 už prodávali myši všichni velcí hráči. Postupně myš ztratila své kolečko, které se muselo čistit od prachu, počet tlačítek se neustále měnil, až se vrátil na 3 i více...

Mimochodem, pokud vám bude po odstavci o mechanických klávesnicích líto, že jednu takovou nemáte doma, můžete se utěšit tím, že vlastně máte – akorát je třítlačítková a jmenuje se myš.

24-3-6 Průnik plánů — 13 bodů

Zaměstnanec Applu plánuje proniknout do sídla Xeroxu, aby mohl co nejlépe okopírovat jejich myš. Drží před sebou plány obchodního a výzkumného střediska, obě budovy se trochu překrývají. Představme si je jako dva konvexní mnohoúhelníky.

Po spuštění poplachu nebude mít mnoho času a chce tedy projít jen tu oblast, které tyto dvě budovy mají společnou – průnik. Vymyslete program, který mu pomůže tento průnik najít.



Na závěr nám dovolte malý pohled do budoucnosti. Klávesnice byla vynalezena hlavně proto, aby zrychlila převod textu do tisku (a později do počítače), neboť psaní rukou bylo dosti nepohodlné a pomalé. Nebylo to ale zrychlení na všech frontách (například matematické přednášky se stále dost špatně zapisují do počítače bez použití OCR nebo vlastních notací).

Jak zrychlit vstup ještě více? Ačkoli jsme v tom stále ještě břídilové, rozpoznávání zvuku a subjektivně zajímavější rozpoznavání mozkových vln postupuje dále a je možné, že brzy se stanou dominantními technikami zaznamenávání lidských myšlenek do nul a jedniček. Už teď jsou na trhu poměrně zajímavé hračky.[2]

Klávesnice, myši a jiné sice nezmizí zcela ze světa (u nás doma máme stále videokazety a videopřehrávač), ale možná je naši potomci budou znát jen z vyprávění nás melancholických stařík. Třeba jsme jedna z posledních generací, která na nich bude umět psát. To je fajn, ne?

Mimochodem, Češi na klávesnicích psát celkem umí – i v psaní na počítači se konají mezinárodní soutěže (i pro středoškoláky) a Češi jsou často na prvních příčkách. Například Intersteno.[3]

Programátorské soutěže však obsahují stále ještě o trochu víc přemýšlení nad úložkami, jako je tato:

24-3-7 Mazání závorek — 8 bodů

Na vstupu se nachází uzávorkování délky N s K různými druhy párových závorek. Uzávorkování může a nemusí být korektní. Vašim úkolem je zjistit, jestli je korektní, a pokud není, jestli existuje nějaký druh závorek takový, že po odebrání všech závorek tohoto typu bude zbytek už korektně uzávorkován.

Například uzávorkování `([{]})` pro $N = 6$ a $K = 3$ není korektní, ale po odebrání závorek typu `[]` se takovým stane, stejně jako když odebereme závorky typu `{}`.

Povídání o vstupních zařízeních bylo dlouhé, ale mnoho oblastí jsme prakticky zatajili. Joysticky, volanty, pedály, rozložení kláves na klávesnici, jakékoli detaily a tak dále.

Pokud by vás zajímalo víc... odložte psací stroje a zkuste se podívat na internet. Slyšeli jsme, že se na něm dá najít spousta věcí.

Martin Böhm

24-3-8 Sčítáme hry s panem Conwayem — 14 bodů

Minule jsme v matematické části rozebrali některé případy piškvorek jako zástupců pozičních her (hráči obsazují pozice, dokud není jedním hráčem zaplněna jedna z výherních linií).

V dnešním díle našeho konečného seriálu navážeme na vyřešení Nimu v první sérii a představíme neformálním způsobem slavnou teorii pana Conwaye.

Pokud jste do seriálu v první nebo v druhé sérii nenahlédli, nevadí, nebude to potřeba. Připomeňme si jen pravidla Nimu: máme několik hromádek žetonů. Dva hráči se střídají v odebírání libovolného počtu žetonů z jedné hromádky. Komu nezbyl žádný žeton na odebrání, prohrál.

Zopakujme si také, jakými hrami se zabýváme:

- hrají 2 hráči, kteří se střídají v tazích,
- z každé pozice má hráč jen konečně mnoho tahů,
- bez náhody (nehází se kostkou),
- s tzv. úplnou informací (oba hráči mají všechny informace o stavu hry, takže nikdo z nich neskrývá karty),
- s tzv. nulovým součtem (zisk jednoho hráče znamená ztrátu druhého hráče).

Pro matematické řešení her se hodí, když se pozice neopakují a prohrává ten, kdo nemá tah (např. v Nimu nezbyla žádná hromádka). Neopakující se pozice zaručují, že každá partie skončí výhrou jednoho z hráčů nebo remízou (existuje-li).

Malá poznámka na úvod: v této teorii se často myslí pod pojmem *hra* konkrétní pozice v nějaké hře s danými pravidly. Proto pozici budeme značit G od anglického *game*. *Pozici* chápeme jako celý stav hry (rozložené kameny, všechny povolené tahy), ale někdy bez informace, který hráč je na tahu.

Oproti hrám jako šachy je na Nimu zvláštní, že z dané pozice mají oba hráči stejné tahy a záleží jen, kdo má právě odebírat žetony. Takovým hrám se říká *nestranné*.

Opakem jsou *zaujaté* hry – možné tahy hráčů se pro danou pozici mohou lišit, například v šachách smí bílý pohnout jen s bílými figurkami. I piškvorky jsou zaujaté, ačkoliv hráči mohou táhnout na stejná místa.

Všimněte si souvislosti s obtížností her. Nim jakožto nestrannou hru jsme kompletně vyřešili (dokážeme zjistit, kdo vyhraje a jak má táhnout), kdežto v případě šachů nebo Go je jen mizivá naděje, že by se je podařilo vyřešit (ať už s pomocí počítače nebo matematicky).

[2] `http://en.wikipedia.org/wiki/Brain%E2%80%93computer_interface`

[3] `http://www.intersteno.org/`

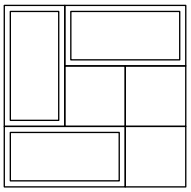
[4] `http://en.wikipedia.org/wiki/Sprague-Grundy_theorem`

Dokonce neexistuje žádná nestranná hra, kterou by dnes bylo těžké vyřešit. Každou lze totiž převést na Nim[4] i hrát podle strategie v něm. Nestranné hry tedy nebudou ty zajímavé.

Jednou z motivací pro Conwaye k vývoji teorie zaujatých her bylo pozorování, že v koncovkách Go se hra rozpadá na několik oddělených částí, jež se ve výsledku sečtou.

Sčítání pozic si lze představit snadno na Nimu: v jedné hře mám dvě hromádky, v druhé tři, jejich součtem bude hra s pěti hromádkami o velikostech stejných jako v původních hrách. Hráč pak má možnost vybrat si, do jaké hry ze součtu bude táhnout.

Go je však velmi složité i pro dnešní počítače, které nejsou zdaleka schopné vyhrát nad profesionály. Proto si sčítání ukážeme na jednodušší zaujaté hře: *dominování*.



Máme hrací desku se čtvercovou sítí, na kterou hráči střídavě pokládají dominové kostky o rozměrech 2×1 na volná políčka. Kdo nemá tah, prohrál.

Aby se nám lépe uvažovalo, označme si hráče: jeden bude Levý a druhý pRavý (zkratky L a R pocházejí samozřejmě z angličtiny).

Ve hře pokládá levý domina svisLe, pravý vodoRovně.

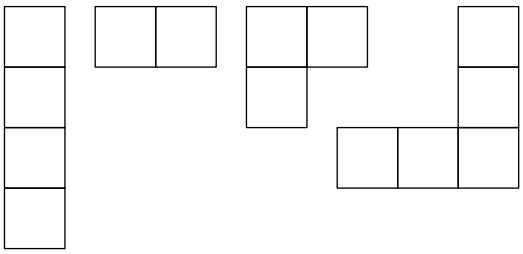
Dále rozdělíme pozice do čtyřech skupin podle vítěze, přičemž nás bude zajímat, kdo vyhraje, když začne levý a když začne pravý. Tyto skupiny budeme nazývat *výsledkové třídy*:

- vyhraje hráč, který bude táhnout jako první, ať už je to levý nebo pravý. Takovým pozicím budeme říkat vyhrané (pro začínajícího hráče) a jejich třídu (něco jako množinu) označovat V.
- začínající hráč prohraje, pozice je tedy prohraná. Třídu prohraných pozic budeme značit P.
- levý vždy vyhraje, ať začne kdokoliv. Pozice je levého a L označuje třídu takových pozic.
- analogicky se třída pozic pravého hráče značí R.

Řečeno tabulkou:

		R začne	
	vyhraje	L	R
L začne	L	L	V
	R	P	R

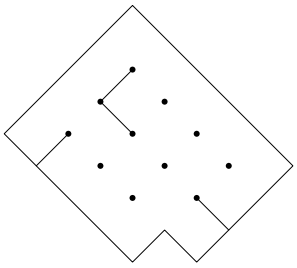
Zleva je příklad pozice levého (tj. hry náležející do L), pravého, pozice vyhrané a prohrané.



Všimněte si, že pozici rozebíráme, jako by v ní mohl začít hrát kterýkoliv hráč, což se bude hodit pro sčítání.

Nestranné hry jsou mnohem jednodušší: jelikož nelze rozlišit levého a pravého hráče, pozice jsou buď vyhrané, nebo prohrané pro začínajícího. Jak jste ověřili v první sérii, v Nimu jsou v třídě prohraných ty, v nichž je XOR hromádek 0, všechny ostatní jsou vyhrané.

Úkol 1 [3b]: Hra *Maze* spočívá v posouvání žetonu v bludišti (viz obrázek). Levý posouvá žeton šikmo doleva a dolů o kolik políček chce (avšak alespoň o jedno), pravý šikmo doprava a dolů také o libovolný počet políček. Není však možné táhnout skrz vnitřní nebo vnější obvodovou zeď.

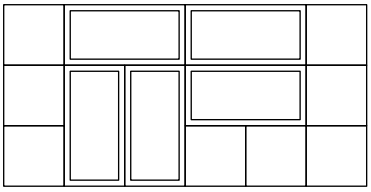


I v této hře prohrává, kdo nemůže táhnout. Na následujícím herním plánu určete pro každé z možných počátečních políček žetonu, jak dopadne hra.

Jinými slovy řečeno – zařaďte každé políčko do jedné ze tříd L, R, V, P.

Hra + hra = hra

Hurá na sčítání her! Mějme v dominování třeba tuto pozici:



Volná políčka jsou rozdělena dominovými kostkami uprostřed na dvě nezávislé části. Můžeme tedy vyřešit hru pro obě části a pak dát výsledky dohromady – čili obě části sečíst.

Právě ona nezávislost pozic je pro sčítání důležitá. Pokud lze zahrát do obou částí najednou, přesunout kámen z jedné části do druhé nebo něco podobného, nemusí platit nic, co si dále ukážeme.

Levá část pozice na obrázku je jasně vyhraná pro levého (má jeden tah, kdežto pravý tam nemůže položit ani jednu dominovou kostku). Pro pravou pozici si lze snadno rozmyslet, že oba hráči tam položí jedno domino, ať už začíná kdokoliv. Pak už nelze zahrát ani tah, takže pozice je v třídě P.

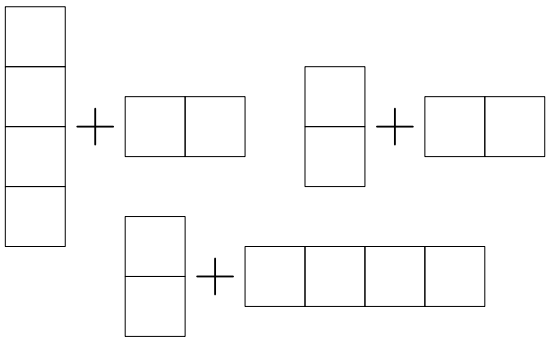
Jak dopadne součet? Levý (svislý) má dva tahy bez ohledu na to, kdo začne, pravý (vodorovný) jen jeden, pozici tedy vyhraje vždy levý.

Obecně platí, že součet hry G a pozice prohrané pro začínajícího je ve stejné výsledkové třídě jako G. Zkusme si to dokázat. Označme si prohranou pozici jako H a rozlišíme čtyři případy podle toho, kam patří G:

- G je v třídě L a na tahu je pravý: levý hraje vždy do stejné hry jako předtím pravý. Jinými slovy, když pravý zahraje do G, levý následně taky, když táhne do H, i levý táhne do H. Tím se hra rozpadne na dvě nezávislé části (tahy lze rozdělit ty, co jsou do G, a ty do H). Obě části má vyhrané levý, díky čemuž vyhrává i součet $G+H$.
- G je v L a na tahu je levý: levý zahraje do G, čímž ji změní na hru z P nebo z L (nic jiného není možné, jinak by v ní mohl vyhrát pravý). Pak už levý opět jen hraje do stejných her jako pravý, čímž vyhrává a součet náleží do L – ať začne kdokoliv, vyhraje levý.
- G je v R: analogický důkaz jako pro L.
- G je v P: druhý hráč na tahu se zase „opičí“ po prvním: hraje do stejné hry jako předtím první. Hra se tedy v podstatě rozpadne na dvě oddělené části, které jsou obě prohrané pro prvního hráče, a součtem je tedy prohraná hra.

- G je ve V: ten, kdo je na tahu, zahraje do G, čímž ji změní na prohranou hru nebo hru prvního hráče (pokud je to levý, tak hru z třídy L). Už víme, že součet dvou prohraných her je prohraná hra a součet hry z L (popř. R) a prohrané hry náleží do L (popř. R), tudíž první na tahu v součtu $G+H$ vyhrává a součet je ve třídě V.

  Dále platí, že součet dvou pozic vyhraných pro levého patří opět do třídy L, což si lze snadno rozmyslet. Analogicky dvě pozice pravého dávají v součtu hru z R. Jak však dopadne součet pozice levého a pozice pravého?



  V součtu vlevo nahoře má levý o jeden tah více (tedy vyhraje bez ohledu na to, kdo začne), podobně v pozici dole má pravý o tah více. Součet vpravo je prohraná hra.

  Úkol 2 [6b]: Pro každé přirozené k zjistěte, do jaké třídy patří dominování na mřížce $2 \times 4k$. Nikde zatím není položeno žádné domino (mřížka je prázdná).

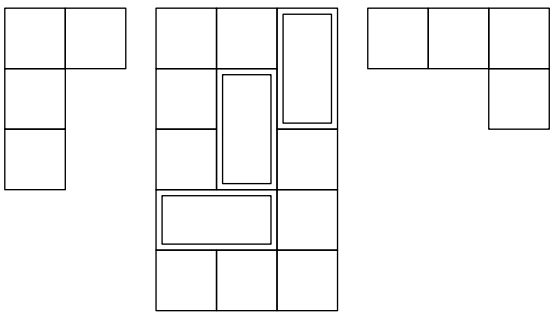
  Jak je to se součtem více než dvou pozic? Aby tento součet nějak fungoval, bylo by třeba dokázat asociativitu, tedy že $(G+H)+I = G+(H+I)$, což je spíše technická záležitost. Komutativita je celkem zřejmá a už můžeme s hrami počítat téměř jako s čísly.

  Jako s čísly? A co z her udělat rovnou čísla, ať se nám lépe sčítá? Pojďme na to! Jelikož však číslování her vydá na pěkných pár odstavců a dnes jich bylo už dost, na čísla si zatím jen připravíme půdu a necháme je na příště.

  Bude se nám hodit umět rozeznat, které hry jsou shodné. Hry G a H se rovnají, tedy $G = H$, pokud dopadnou stejně, když ke každé přičteme libovolnou jinou hru. Přesněji řečeno pro každou hru X náleží hry $G + X$ a $H + X$ do stejné výsledkové třídy.

  Speciálně jsou dvě hry stejné, pokud mají stejné herní stromy (až na pořadí synů).

  Dále lze hru obrátit: hráči si vymění možné tahy, které od teď povedou do podobně obrácených pozic. V dominování si to lze představit tak, že levý bude pokládat vodorovná domina a pravý svislá nebo že hrací desku prostě otočíme o 90°. Obrácená hra G se značí $-G$.



  Na obrázku je popořadě hra G, hra $H = G$ a hra $-G$. Všimněte si, že H vzniklo z G jednoduše přičtením prohrané pozice (volná políčka vpravo a dole).

Úkol 3 [5b]: Mějme dvě hry G a H, přičemž $G = H$. Dokažte, že hra $G + (-H)$ (intuitivně lze psát také $G - H$) náleží do třídy P. Nepůjde-li vám to, ukažte alespoň, že $G - G$ je prohraná hra.

Pavel Veselý

Recepty z programátorské kuchařky

Intervalové stromy

Představme si, že máme posloupnost celých čísel

$$p_1, p_2, \ldots, p_N,$$

se kterou budeme průběžně provádět tyto dvě operace:

1. Změna jednoho čísla v posloupnosti.
2. Zjištění součtu čísel na nějakém intervalu $[a, b]$, tedy $p_a + p_{a+1} + \ldots + p_b$.

Nejdříve se zkusíme zamyslet, jak bychom úlohu řešili, kdybychom měli jen druhou operaci, tj. dotazy na součty na konkrétních intervalech. K řešení využijeme pole *prefixových součtů*.

Pole prefixových součtů je pole délky $N + 1$, ve kterém na indexu i leží součet prvků posloupnosti od indexu 1 až do indexu i. Tedy `pref[i] = p[1] + ... + p[i]`; z praktických důvodů dodefinujeme `pref[0] = 0`.

Není těžké si rozmyslet, že toto pole dokážeme jednoduše spočítat v čase $\mathcal{O}(N)$.

Nyní, když už známe všechny prefixové součty posloupnosti, umíme snadno spočítat součet na libovolném intervalu $[a, b]$:

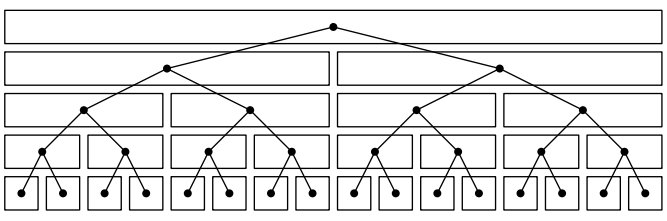
```
s[a,b] = pref[b] - pref[a-1]
```

Každý dotaz dokážeme zodpovědět v konstantním čase. Celý algoritmus má tedy složitost $\mathcal{O}(N + D)$, kde N je délka posloupnosti a D je počet dotazů.

Když si povolíme i měnit čísla v posloupnosti, pokazíme si časovou složitost. S prefixovými součty stále dokážeme dotaz na součet podposloupnosti provádět v konstantním čase, ale při změně čísla v posloupnosti se nám může stát, že musíme změnit až všechny prefixové součty, takže složitost této operace je $\mathcal{O}(N)$ a celková složitost pro Z změn a D dotazů je v nejhorším případě $\mathcal{O}(NZ + D)$.

S touto složitostí se samozřejmě nespokojíme a budeme se snažit, abychom výsledné intervaly uměli co nejrychleji skládat z předpočítaných hodnot a abychom při změně posloupnosti museli změnit co nejméně hodnot. K tomu se nám bude hodit datová struktura jménem intervalový strom.

Zavedení intervalového stromu



Intervalový strom je dokonale vyvážený binární strom, jehož každý list představuje nějaký interval a všechny ostatní vrcholy reprezentují interval, který vznikne složením intervalů jejich synů.

Zároveň intervaly vrcholů jedné hladiny na sebe navazují (vždy směrem zleva doprava). Z toho vyplývá, že složením

intervalů z vrcholů jedné hladiny dostaneme interval, který si pamatujeme v kořeni.

Intervalových stromů existuje více druhů. Obvykle je rozlišujeme podle toho, jaké informace si v nich pamatujeme. Například ve stromě pro součty si každý vrchol pamatuje součet na svém intervalu, ve stromě pro maxima si pamatuje maximum na intervalu apod.

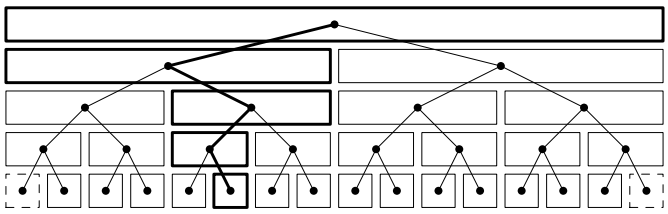
Můžeme ale klidně mít třeba strom, který si pamatuje, jestli celý jeho interval obsahuje jen jednu hodnotu, a pokud ano, tak jakou.

My se teď zaměříme na intervalový strom pro součty a pomocí něj vyřešíme úvodní úlohu.

Na začátku budeme chtít, aby v listech intervalového stromu byly hodnoty původní posloupnosti, přičemž první a poslední list stromu necháme volné, později uvidíme proč. Zároveň ale chceme, aby tento strom byl dokonale vyvážený.

Posloupnost tedy prodloužíme tak, aby její velikost byla mocnina dvojky minus dva (na její konec přidáme nějaké prvky). Všimněte si, že tím jsme strom nezvětšili více než dvakrát a že nám nezáleží na tom, jaké prvky jsme do stromu přidali, protože s nimi nikdy nebudeme pracovat. Nyní k jednotlivým operacím.

Změnu čísla v posloupnosti uděláme jednoduše. Zjistíme, o kolik se hodnota prvku posloupnosti změní, najdeme odpovídající list a k tomuto listu a ke všem jeho předkům přičteme daný rozdíl. Tím jsme upravili všechny intervaly, do kterých tento prvek patří.

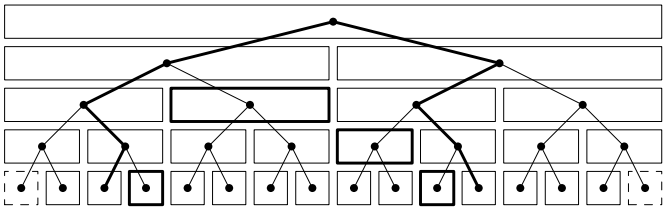


Změna hodnoty na indexu 5 *– musíme změnit vyznačené vrcholy – intervaly* $[5,5]$*,* $[4,5]$*,* $[4,7]$*,* $[1,7]$ *a* $[1,14]$

Nyní se podívejme, jak ze stromu zjistíme součet na nějakém intervalu $[a,b]$. Jinými slovy: potřebujeme ze stromu vybrat takové vrcholy, aby sjednocení jejich intervalů byl náš dotazovaný interval, a zároveň chceme, aby těchto vrcholů bylo co nejméně.

Součet intervalu $[a,b]$ zjistíme tak, že si ve stromě najdeme listy reprezentující pozice $a-1$ a $b+1$ posloupnosti a jejich nejbližšího společného předka p.

Nyní budeme postupovat z listu od $a-1$ až do p a vždy když do nějakého vrcholu přijdeme z levého syna, tak do výsledku přidáme interval pravého syna. Stejně tak postupujeme od $b+1$ k p a pokud do vrcholu přijdeme z pravého syna, tak přidáme jeho levého syna. Postupně tak poskládáme celý interval.



Výběr intervalu $[3,10]$*. Jeho součet spočítáme přes vyznačené intervaly:* $[3,3]$*,* $[4,7]$*,* $[8,9]$ *a* $[10,10]$*.*

Změna prvku posloupnosti má časovou složitost $\mathcal{O}(\log N)$, protože jsme na každé hladině změnili pouze jeden interval a strom má $\mathcal{O}(\log N)$ hladin.

Zjištění součtu na intervalu má také složitost $\mathcal{O}(\log N)$, neboť jsme do výsledku přidali maximálně $2\log N$ intervalů: nejvýše $\log N$ při cestě z listu $a-1$ a $\log N$ při cestě z $b+1$.

Implementace intervalového stromu

Při implementaci intervalového stromu využijeme jeho dokonalé vyváženosti a budeme jej implementovat v poli (stejně jako se do pole ukládá halda). Kořen stromu bude v poli na indexu 1, vrcholy z druhé hladiny budou mít postupně indexy 2 a 3, až listy budou mít indexy N, …, $2N-1$. V této reprezentaci platí pro vrchol s indexem i následující pravidla:

1. $2i$ a $2i+1$ jsou jeho synové.
2. $\lfloor i/2 \rfloor$ je jeho předek (pro $i > 1$).
3. Pokud je i sudé, tak je vrchol levým synem, jinak pravým.
4. Pro sudé i je $i+1$ pravý bratr, pro liché i je $i-1$ levý bratr.

Nyní víme vše potřebné, tak se podívejme na samotnou implementaci v jazyce C. Pozor, prvky posloupnosti indexujeme od 1.

```
int N = 100;    // velikost posloupnosti
int posl[100];  // posloupnost
int *strom;     // intervalový strom

// Deklarace funkcí
void inic(int N);
void pricti(int index, int hodnota);
int soucet(int A, int B);

void inic(int N) {
  // Najdeme nejbližší vyšší mocninu dvojky
  int listy = 1;
  while (listy<N+2) listy = listy*2;
  // Pro strom potřebujeme 2*(počet listů) vrcholů
  // (nepoužíváme strom[0])
  strom = (int*)malloc(sizeof(int)*2*listy);
  N = listy;
  for (int i=0; i<2*listy; i++) strom[i] = 0;
  // Na příslušná místa přičteme hodnoty posloupnosti
  for (int i=0; i<N; i++)
    pricti(i, posl[i]);
}

// Přičtení hodnoty na dané místo posloupnosti
void pricti(int index, int hodnota) {
  int k = N + index;
  while(k>0) {
    strom[k] = strom[k] + hodnota;
    k = k/2;
  }
}

// Zjištění součtu na intervalu
int soucet(int A, int B) {
  int souc = 0;
  int a = N + A - 1;
  int b = N + B + 1;
  while (a!=b) {
    // Pokud je a levý syn, tak přičti pravého bratra
    if (a%2==0) souc = souc + strom[a+1];
    // Pokud je b pravý syn, tak přičti levého bratra
    if (b%2==1) souc = souc + strom[b-1];
    a = a/2; b = b/2; // Přesun na otce
  }
  // Navíc jsme přičetli syny společného předka.
  souc = souc - strom[2*a] - strom[2*a+1];
  return souc;
}
```

V této implementaci jsme strom upravovali zdola směrem nahoru. Existuje ještě rekurzivní implementace, kde upravujeme strom od kořene směrem dolů.

Cvičení

- Naprogramujte rekurzivní implementaci operací (strom se prochází shora dolů).
- Jak by vypadala implementace intervalového stromu pro maxima?

Použití intervalového stromu

Intervalový strom je silný nástroj, kterým se dá vyřešit spousta úloh. Ale než ho začnete používat, tak si vždy rozmyslete, zda úloha nelze řešit elegantněji – jestli nejdete kanónem na vrabce.

Navíc se některé druhy intervalových stromů implementují velmi obtížně a za tu práci to nestojí.

Intervalový strom obvykle použijeme, pokud potřebujme průběžně zjišťovat informace o intervalech a zároveň je i měnit. Například pokud používáme jen jednu z těchto operací (a tu druhou jen zřídka), existuje často lepší řešení než intervalový strom – viz úvodní příklad.

Fenwickův strom

Fenwickův strom, někdy také zvaný *finský strom,* je v podstatě jen strom reprezentovaný v poli. Jeho používání je podobné jako používání intervalového stromu pro součty. Rozdíl je jen v implementaci daných funkcí.

My si Fenwickův strom opět ukážeme na úvodním příkladu. Zase tedy budeme potřebovat funkci pro změnu hodnoty v posloupnosti a funkci pro zjištění součtu na intervalu. (Ve skutečnosti zjistíme dva prefixové součty a z nich pak spočítáme výsledný interval.)

Fenwickův strom je poněkud magická datová struktura. Abychom však nepřišli o pověstný „aha-efekt“, obrátíme běžný postup vysvětlování. Nejdříve si ukážeme, jak se Fenwickův strom implementuje, a teprve pak dokážeme, že ta magie opravdu funguje.

Fenwickův strom bude pole velikosti $N+1$, kde index 0 nebudeme používat. Používat budeme pouze prvky $1, \ldots, N$, které všechny na začátku nastavíme na 0.

Pokud v posloupnosti změníme hodnotu, stejně jako u intervalového stromu, ve Fenwickově stromě na některá místa přičteme rozdíl oproti předchozí hodnotě.

```
void pricti(unsigned int index, int rozdil) {
  while (index<=N) {
    strom[index] += rozdil;
    index = index + (index & -index);   // bitový and
  }
}
```

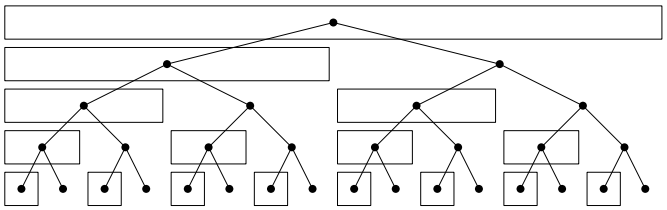
A zde je funkce pro zjištění prefixového součtu:

```
int prefSoucet(unsigned int index) {
  int soucet = 0;
  while (index>0) {
    soucet = soucet + strom[index];
    index = index & (index-1);
  }
  return soucet;
}
```

Toť celá implementace. No, nevypadá na první pohled magicky? Pokud chcete vědět, jak tohle celé funguje, tak čtěte dál.

Ve Fenwickově stromě je na indexu 1 uložen první prvek, na indexu 2 součet prvního a druhého, na indexu 3 třetí prvek, na indexu 4 součet prvních čtyř, ...

Na indexu N je uložen součet posledních 2^K hodnot, kde K je pozice prvního jedničkového bitu zprava v binárním zápisu čísla N. Ve stromě máme tedy uloženou takovou pravidelnou strukturu intervalů.



Nyní se podíváme, co dělají naše magické funkce na posouvání ve stromě.

Ve výrazu `index & (index-1)` z funkce `prefSoucet()` se vynuluje nejpravější jedničkový bit v indexu. Tím se dostaneme na první interval, který jsme ještě nepřičetli. Jakmile máme `index == 0`, můžeme ukončit výpočet, neboť již máme interval celý sečtený.

Výraz `index + (index & -index)` dělá to, že se v pomyslném stromě intervalů posune o úroveň výš. Pokud jsme tedy v intervalu o velikosti 2, tak se dostaneme do intervalu velikosti 4, který daný interval obsahuje (tento interval je jednoznačný). Samotný výpočet dělá to, že v čísle `index` vezme nejpravější jedničku a znova ji přičte.

> Magická operace `index & -index` funguje jen v případě, že se jako reprezentace záporného čísla používá tzv. dvojkový doplněk: `-k == ~k + 1`, neboli všechny bity čísla se znegují a pak se přičte jednička.

Fenwickův strom se používá hlavně kvůli jednoduchosti jeho naprogramování a také kvůli efektivitě samotného výpočtu a nevelké náročnosti na paměť. Při jeho implementaci doporučujeme dávat si pozor na správnost bitových funkcí.

Cvičení

- Rozmyslete si, že oba magické výpočty opravdu dělají to, co mají, a také, proč vše vlastně funguje.

Karel Tesař