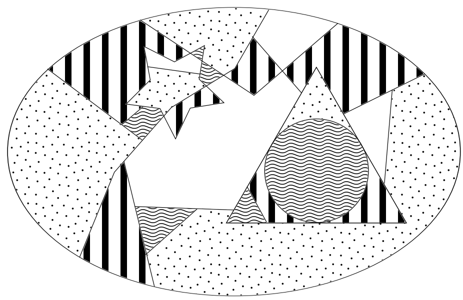
Rovinné grafy

Na úvod položme otázku: „Stačí čtyři barvy na obarvení libovolné politické mapy, aby žádné dva sousedící státy neměly stejnou barvu?“ (Za sousedící státy se nepovažují ty, které sousedí jen v jediném bodě, ani v konečně mnoha.)

Na první pohled jednoduchá otázka, že? Matematici se s ní však trápili více jak století (od první formulace v roce 1852 do vyřešení v roce 1976) a nikdo nebyl schopen přijít s důkazem ani s protipříkladem, tedy mapou, na níž je potřeba pět barev. I třeba na tuto mapu jsou potřeba jen čtyři barvy:



Nebudeme dlouho tajit odpověď: čtyři barvy stačí. Důkaz se spoléhá na strojové probírání stovek případů (fragmentů rovinných grafů) a ve své době pro svou domnělou nematematičnost vzbudil velké pozdvižení. Dodnes se snaží mnoho vědců najít jednodušší důkaz, podobně jako u Velké fermatovy věty.

My si ukážeme, jak každou politickou mapu obarvit šesti barvami, a od toho přejdeme k pěti barvám. Nejdříve si však převedeme politické mapy na rovinné grafy a předvedeme si několik jejich užitečných vlastností.

Cvičení

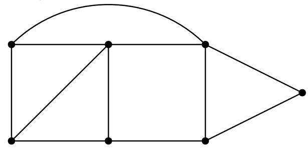
- U státu se v úvodní otázce tiše předpokládá, že je souvislý, tedy mezi každými dvěma místy v něm lze přejít bez přechodu do jiného státu. Rozmyslete si, jak by vypadala mapa s nesouvislými státy, na niž je potřeba pět barev.

Rovinné grafy

Rovinný graf (někdy též nazývaný planární) je graf, který můžeme nakreslit do roviny bez křížení hran. To znamená, že vrcholům přiřadíme vhodné body a hrany nakreslíme jako křivky spojující příslušné body tak, že se žádné dvě křivky neprotínají mimo své krajní body.

Ne každý graf lze takto nakreslit – sami si rozmyslete, že například graf K_5, což je 5 vrcholů spojených každý s každým, žádné rovinné nakreslení nemá. Na druhou stranu například každý strom určitě rovinný je.

Vezměme si tedy nějaký graf a jeho rovinné nakreslení, například tento:



Hrany nakreslení dělí rovinu na několik oblastí, těm budeme říkat *stěny.* Náš graf má 6 stěn: jednu čtvercovou, čtyři „trojúhelníkové“ (tedy ohraničené třemi hranami, byť to nejsou vždy úsečky) a jednu 6-úhelníkovou (to je celý zbytek roviny okolo grafu, tzv. *vnější stěna*).

Například libovolné rovinné nakreslení stromu by mělo pouze jednu stěnu, a to tu vnější. Všimněte si, že pokud v grafu nejsou mosty ani artikulace, je každá stěna ohraničena nějakou kružnicí. (Pozor, to, jak vypadají stěny, závisí na konkrétním nakreslení do roviny!)

Barvení grafů

Jistě byste dokázali vymyslet převod politické mapy se státy na graf. Jen pro úplnost: samotné státy budou vrcholy a hrana povede mezi vrcholy právě tehdy, když odpovídající státy sousedí.

Podobně jako se barví politické mapy, lze barvit i grafy. Samozřejmě ne *doslova,* barvením se zpravila myslí přiřazování přirozených čísel jednotlivým vrcholům pod podmínkou, že sousední vrcholy nesmí mít stejnou barvu. Důležitou vlastností grafu je pak jeho barevnost, neboli nejmenší počet barev, kterými se dá obarvit. Úvodní problém tedy vlastně říká, že barevnost každého rovinného grafu je nejvýše čtyři.

V praxi má barvení grafů (nejen rovinných) velké využití: představte si například, že chováte spoustu psů, přičemž každý pes nesnáší několik jiných a nesmí s nimi být ve výběhu. Otázkou je, kolik nejméně výběhů je potřeba.

Cvičení

- Rozmyslete si, že graf vytvořený z politické mapy je skutečně rovinný, tzn. že tento graf lze zakreslit do roviny tak, že se nekříží jeho hrany.
- Představte si, že máte algoritmus, který obarví vstupní graf daným počtem barev, pokud to jde. Jak pomocí něj vyřešit sudoku?
- U grafů se studuje i barvení hran (hrany nesmí mít stejnou barvu, pokud sdílejí vrchol). Zkuste si rozmyslet, jak vrcholová i hranová barevnost souvisí s maximálním stupněm grafu (např. najít horní omezení v závislosti na maximálním stupni, u hranové i dolní).

Vlastnosti rovinných grafů

O rovinných grafech platí několik důležitých vět, které se často hodí při vytváření grafových algoritmů.

Je zřejmé, že každý strom je rovinný. Navíc pro každý strom platí, že má o jedna méně hran než vrcholů (tedy $e = v - 1$, kde v je počet vrcholů a e počet hran). Proč tomu tak je? Abychom tvrzení dokázali, použijeme *indukci* podle počtu vrcholů.

(Důkaz indukcí funguje tak, že ukážeme platnost tvrzení pro strom s jedním vrcholem a potom pro stromy s v vrcholy, pokud tvrzení platí pro všechny stromy s méně jak v vrcholy – tomu se říká *indukční předpoklad*).

Pro strom s jedním vrcholem formulka určitě platí. Strom s $v > 1$ vrcholy má jistě list, tak jej odtrhneme (poněkud vandalské, nicméně účinné), čímž získáme strom s menším počtem vrcholů, pro který podle indukčního předpokladu formulka platí, a opětovným přidáním listu platit nepřestane, protože k oběma stranám přičteme jedničku.

Vztah počtu vrcholů, hran a stěn

Počet stěn souvislého rovinného grafu je pevně určen počtem vrcholů a hran, aniž by záleželo na konkrétním nakreslení do roviny nebo dokonce na tom, mezi kterými vrcholy hrany vedou. Pro každý souvislý rovinný graf nakreslený do roviny totiž platí tzv. *Eulerova formule:* $v + f = e + 2$, kde v je počet vrcholů, e počet hran a f počet stěn.

Důkaz: Opět indukcí, tentokráte podle počtu hran. Každý souvislý graf má alespoň $v - 1$ hran a pokud jich má právě tolik, je to strom. (Kdyby ne, stačí se podívat na kostru grafu, což musí být strom a ty, jak už víme, mají právě tolik hran a náš graf měl hran více.) Jenže každé rovinné nakreslení stromu má právě jednu stěnu, takže Eulerova formule platí.

Pokud máme nakreslení grafu, který je souvislý a není to strom, znamená to, že obsahuje alespoň jednu kružnici. A každá hrana na kružnici jistě odděluje nějaké dvě stěny. Zvolme si tedy nějakou takovou hranu h a z grafu ji odeberme. Tím získáme graf s menším počtem hran (opět nakreslený do roviny), použijeme indukční předpoklad, Eulerova formule pro něj tedy již platí, a vrátíme hranu zpět. Levá strana rovnosti se tím zvětší o 1 (přidali jsme stěnu), pravá také (přidali jsme hranu), tedy rovnost stále platí.

Cvičení

- Dokažte, že Eulerova formule pro grafy s více komponentami je $v + f = e + k + 1$, kde k je počet komponent.

Omezení počtu hran

Intuicí snadno odhalíte, že velké rovinné grafy nemohou mít spoustu hran, protože by nešly nakreslit bez křížení. Hran je dokonce lineárně, protože platí následující nerovnost (pro grafy s alespoň třemi vrcholy): $e \le 3v - 6$.

Nejprve jednoduchá aplikace: výše jsme zmínili, že K_5 (úplný graf na 5 vrcholech) není rovinný. Má totiž 10 hran, ale naše formulka mu dovoluje jen 9. Takto se dá o spoustě „hustých“ grafů dokázat, že nejsou rovinné, bohužel však tvrzení neplatí obráceně a existují grafy s $3v - 6$ vrcholy (nebo méně), které nejsou rovinné.

Jak tedy nerovnost dokázat? Zvolme si libovolné nakreslení grafu do roviny. Nejprve předpokládejme, že je to triangulace, čili že každá stěna je trojúhelník. V takovém grafu patří každá hrana k právě dvěma trojúhelníkovým stěnám, takže $e = f \cdot 3/2$, čili $f = e \cdot 2/3$. Dosazením do Eulerovy formule získáme $v + (2/3)e = e + 2$, tedy $e = 3v - 6$.

Není-li náš graf triangulace, může to mít několik důvodů. Buďto není souvislý (pak ale stačí větu dokázat pro jednotlivé komponenty a nerovnosti sečíst), nebo je moc malý (má nejvýše dva vrcholy, ale tak malé grafy neuvažujeme) anebo obsahuje nějakou stěnu ohraničenou více než třemi hranami. Dovnitř takové stěny ovšem můžeme dokreslit další hrany a tím ji rozdělit na trojúhelníčky. Tím tedy dokážeme graf doplnit hranami na triangulaci, pro tu, jak už víme, platí dokonce rovnost, a když přidané hrany opět odebereme, snížíme pouze počet hran a uděláme tak z rovnosti nerovnost.

Cvičení

- Rovinné grafy bez trojúhelníkové stěny (tedy ty, co neobsahují K_3 jako podgraf) mají dokonce maximálně $2v - 4$ hran. Důkaz tentokrát ponecháme na vás.
- Lze pro každé v najít rovinný graf s v vrcholy a $3v - 6$ hranami?
- Naopak zkuste přijít na graf, který má $3v - 6$ nebo méně hran a není rovinný.

Vrchol nízkého stupně

V každém rovinném grafu existuje vrchol stupně maximálně 5. (Stupeň vrcholu je počet hran, které s vrcholem sousedí.) Proč tomu tak musí být? Kdyby všechny vrcholy měly stupeň alespoň 6, byl by součet stupňů alespoň $6v$. Jenže součet stupňů je přesně dvojnásobek počtu hran (každá hrana má dva konce), takže $e \geq 3v$, což je spor s předchozí větou.

Cvičení

- Najděte nejmenší rovinný graf, který má všechny stupně 5.
- Tvrzení o vrcholu nízkého stupně platí jen pro konečné grafy. Najděte nekonečný rovinných graf, jehož všechny vrcholy mají stupně 6. Dokážete totéž i pro stupeň 42?

Natíráme 6 barvami

Konečně máme všechny potřebné ingredience (i se zdůvodněním, abyste nám věřili) a můžeme se pustit do barvení. Jelikož máme zaručený vrchol stupně maximálně 5, vezmeme ho, odebereme z grafu a zařadíme na zásobník. Odebráním se určitě neporušila rovinnost grafu, takže vezmeme další vrchol stupně maximálně 5. Takto pokračujeme rekurzivně, dokud nerozebereme celý graf a nenaskládáme všechny vrcholy na zásobník.

Jelikož jsme odebírali vrcholy stupně maximálně 5, má každý vrchol na zásobníku nad sebou nejvýše 5 sousedů v původním grafu. Z toho už je patrný barvící algoritmus: budeme postupně odebírat z vrchu zásobníku a u každého vrcholu máme jistotu, že mezi jeho sousedy chybí jedna barva (některé sousední vrcholy jsou samozřejmě ještě neobarvené, ale obarvených je maximálně 5).

Co se týče implementace, jediným problémem je hledání vrcholů stupně 5 a méně. Řešení však není těžké na vymyšlení, ani na programování: stačí na začátku naskládat všechny vrcholy stupně maximálně 5 do nějaké datové struktury (hodí se třeba fronta) a potom si uvědomit, že při odebírání vrcholu z grafu je potřeba se podívat jen na jeho sousedy, jestli jim neklesl stupeň na 5.

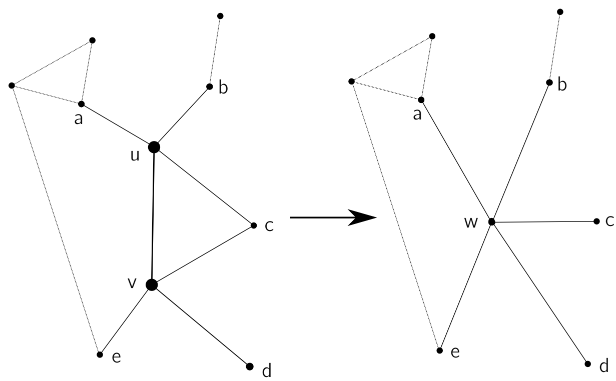
Cvičení

- S jakou nejlepší časovou a paměťovou složitostí lze náš algoritmus implementovat?

Třešnička na dortu: 5 barev

Algoritmus na obarvení rovinného grafu 5 barvami má stejný průběh jako předchozí představený, tedy se postupně rozebírá graf (mimo jiné se odebírají vrcholy) a potom se barví vrcholy v obráceném pořadí, než se zpracovávaly. Jenže tentokrát nelze přímočaře obarvit vrcholy stupně 5 (s vrcholy s menšími stupni můžeme zacházet stejně).

K vyřešení problému se nám bude hodit operace *kontrakce hrany*, která jednu danou hranu odstraní a spojí její dva koncové vrcholy u, v do nového vrcholu w. Hrany vedoucí z u a v do jiných vrcholů nyní povedou z w, násobné hrany se smažou (tzn. pokud u a v měly společného souseda, z w do něj povede jen jedna hrana).



Prvně je důležité pozorování, že mezi sousedy vrcholu v stupně 5 v rovinném grafu, existuje alespoň jedna dvojice vrcholů, mezi kterými nevede hrana. (Kdyby tomu tak nebylo, obsahuje tento graf K_5 jako podgraf, a tudíž nemůže být rovinný.) Najdeme tedy dvojici x, y sousedů v, která není spojena hranou, a místo odstranění v provedeme kontrakci hran xv a yv do vrcholu w. Vrchol v přidáme na zásobník (při implementaci se hodí také uložit, jaké hrany se zkontrahovaly) a pokračujeme rekurzivně s kontrahovaným grafem.

Při samotném obarvování, narazíme-li na zkontrahovaný vrchol v, máme už obarvený vrchol w vzniklý kontrakcí (nechť má například barvu 1). Jelikož sousedi w zahrnují sousedy vrcholů x a y, dáme těmto dvou vrcholům barvu 1 a žádný jejich soused určitě už nedostal stejnou barvu. Vrcholu v pak přidělíme jinou barvu, kterou nemají jeho 3 zbývající sousedi, ani x (tedy ani y). Barev je 5, takže to akorát vyjde.

Tím jsme zakončili povídání o barvicích algoritmech, samotnou implementaci ponecháme čtenáři jako cvičení.

Poznámky

- Kdybychom definici rovinného nakreslení změnili a dovolili hrany kreslit pouze jako úsečky místo libovolných křivek, překvapivě se nic nezmění: každý rovinný graf má rovinné nakreslení, v němž jsou všechny hrany úsečky. Ale není to zrovna jednoduché dokázat.
- Stejně jako do roviny bychom mohli grafy kreslit třeba na povrch koule. Tím se také nic nezmění, zkuste sami vymyslet, jak z rovinného nakreslení udělat „kulové“ a naopak. Ale třeba anuloid (povrch pneumatiky) se už chová jinak, například zmíněný nerovinný graf K_5 se na anuloid dá nakreslit bez křížení hran.
- Jak poznat, jestli je daný graf rovinný nebo ne? Tak, že nalezneme jeho nakreslení v rovině, ale rychlý algoritmus není vůbec jednoduchý. Více o tomto problému se dočtete například na anglické Wikipedii pod heslem Planarity testing nebo v [GrafAlg].
- Při pohledu na mapu států lze vidět také jiný rovinný graf. Ten má jako vrcholy body, kde se střetávají hranice tří nebo více států, a hrany v rovinném nakreslení tohoto grafu vedou po hranicích. Vztah druhého rovinného grafu na mapě k prvnímu má svou abstrakci v teorii grafů: *duální graf* rovinného grafu má vrcholy odpovídající stěnám původního grafu a hrana mezi nimi vede právě, když v původním rovinném grafu spolu stěny sousedí. Sami si ověřte, že oba grafy jsou vůči sobě navzájem duální. Malé cvičení: jak vypadá duální graf duálního grafu nějakého rovinného grafu? (Tedy dvakrát uděláme z grafu duální graf.)
- Více informací o teorii (nejen rovinných) grafů najdete například v [Kapitoly] či [Demel].

Pavel Veselý, Martin Mareš a Petr Škoda

Úloha 18-5-5: Do vysokých kruhů

Napište program, který dostane na vstupu N kružnic zadaných souřadnicemi středu a poloměrem (souřadnice a poloměry jsou reálná čísla), a na výstup vypíše, na kolik částí dělí tyto kružnice rovinu. Můžete předpokládat, že se žádné tři kružnice neprotínají v jednom bodě. Rovina bez kružnic se považuje za jeden díl, jedna kružnice rozdělí rovinu na dva díly (vnitřek a vnějšek kružnice) atd.

Příklad:

Na vstupu jsou 3 kružnice:

x	y	r
1	1	0,9
2	0,8	0,4
1,9	1,5	0,6

Rovina je pak rozdělena na 8 částí.