

Milí řešitelé a řešitelky!

Blíží se konec 22. ročníku, ale ještě než odjedete k moři, do hor, na vandr či na jinou skvělou letní akci, přilétá k vám na křídlech větru poslední série sepsaná na starý pergamen Pavlem „Pauliem“ Veselým spolu s druhým dílem seriálu o APL od Martina Mareše.

Termín jejího odevzdání je stanoven na pondělí 14. června v 8:00 SELČ, což znamená, že papírové řešení byste měli podat na poštu do středy 9. června.

Nezapomeňte, že nyní máte poslední šanci, jak si zajistit účast na našem úžasném podzimním soustředění! A ti, kdo mají již spoustu bodů, mohou bojovat o titul *Král KSP* a získat tak jedno království a půl princezny (více informací již brzy na našich webových stránkách).

Elektronická řešení přijímáme na obvyklé stránce <https://ksp.mff.cuni.cz/submit/>. Náš certifikát sice není podepsán žádnou komerční autoritou, nicméně pro jeho ověření zde uvádíme jeho SHA1 hash:

10:3B:C1:E2:4F:9A:01:98:DA:DB:5D:A0:D5:5C:80:57:DE:AD:28:C3

Papírová řešení nám pak můžete zasílat klasickou poštou na adresu

Korespondenční seminář z programování

KSVI MFF UK

Malostranské náměstí 25

118 00 Praha 1



Pátá série dvaadvacátého ročníku KSP

„Je rozhodnuto, vyrazíš hned,“ zahřměl otec a skály vše zopakovaly ozvěnou.

„Ale . . .“

„Žádné ale!“ zaburácel, až se země zatřásla.

„. . . když já jsem ještě moc malý,“ pípl jsem. „Tys byl určitě větší, než jsi odletěl.“

„Řekla to velická pramáti a té nelze odporovat!“

„Jenže ona je netrpělivá a sklerotická. Chce mít všechno hned a zapoměla, že jsem příliš mladý.“

„Neurážej pramáti! A teď upaluj pro princeznu.“

Jestli si myslíte, že draci mají život lehký, když umí chrlit oheň, přetrvávají věky a jsou velcí, šeredně se pletete. Téměř nikdo nás sice neohrožuje, až na lidi, a o ty právě jde. Jsou sice drobní, jenže je jich jak mravenců. A tak se musíme skrývat v pustých horách mezi skalami, lovit zvěř a doufat, že na nás nepřijde armáda lučištníků.

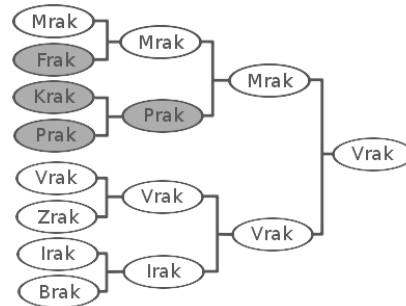
Z bezpečí mezi štíty, tyčícími se vysoko do nebe, vycházíme jen z jediného důvodu: ukrást si princeznu, v případě dračic samozřejmě prince. Pramáti pak člověka očaruje tak, aby věrně sloužil svému drakovi. Princ či princezna je vlastně celkem užitečná věc, jelikož má šikovné prťavé ručičky, což nám drakům chybí. Navíc se jedná o tradici a zároveň rituál vstupu mezi velké draky.

22-5-1 Turnaj

10 bodů

Ještě před odletem jsem musel dohrát turnaj v ohnivém zápase, což je bezkontaktní souboj, v němž se postaví dva draci proti sobě a chrlí na sebe oheň, dokud jednomu nezačne hořet tráva nandaná na čenich.

Už před pár dny jsme sehráli celého pavouka vyřazovacího turnaje (dva draci se utkají, do dalšího kola postupuje jen jeden, jenž se utká s vítězem jiného souboje . . .), takže známe a obdivujeme vítěze, jenže se neumíme dohodnout, kdo je na druhém místě. Občas totiž nelze určit, jak by dopadl souboj dvou draků, když se spolu neutkali, nemají společného soupeře, ani jejich soupeři spolu nebojovali a nemají společného protivníka, s nímž se utkali . . . Platí však alespoň tranzitivita: jestli drak A porazil draka B a drak B draka C, porazil by i drak A draka C.



Příklad pavouka hry. Šedě jsou zvýrazněni ti, které by určitě porazil drak Mrak.

Potřebujeme zjistit, jací jsou kandidáti na druhé místo, kolik jich je a jak mezi nimi co nejefektivněji vybrat, tedy kolik zápasů je třeba navíc ještě sehrát. Tato úloha je logická, takže nemusíte psát program (draci stejně nedisponují počítači), stačí popsat a zdůvodnit postup určení druhého nejlepšího draka, který by určitě porazil všechny ostatní kromě prvního.

Po zdárném obhájení druhého místa jsem vyrazil. Tížil mě jen pocit, že nevím, jestli za tohle dobrodružství nějaká princezna stojí. Ta poslední, již na svých zádech před 100 lety přitáhl bratranec, byla podle otce nějaká podivná. Možná si jenom na princeznu hrála. Uvidíme, jakou seženu teď.

22-5-2 Strážce údolí

10 bodů

Nejprve jsem ovšem musel prosvištět kolem stráží hlídajících naše údolí. Dělalí nám je havrani rozmístění poblíž ústí do jiného údolí tak, aby byli na přímce. Jenže někteří jsou moc blízko u sebe a mají tendenci se místo hlídání vybavovat, takže jsme se rozhodli počet stráží zredukovat. Nevíme však, které propustit.

Známe polohu všech N havranů na přímce, zadanou celočíselnými mezerami mezi nimi, a chceme jich vyřadit K , aby byli dva nejbližší havrani od sebe co nejdále. Potřebujeme tedy maximalizovat minimální vzdálenost mezi nimi. Dokážete pro nás rychle najít K havranů, jež pošleme do výslužby?

Například pro $N = 6$, $K = 3$ a mezery mezi havrany 4, 6, 2, 5, 7 je správným řešením propustit 2., 3. a 5. havrana (bráno zleva), takže zůstanou mezery 12, 12. Pro $N = 14$, $K = 7$, mezery 5, 12, 6, 3, 8, 1, 4, 1, 1, 9, 15, 1, 16 vyhodíme 2., 4., 6., 7., 8., 9. a 12. (možností je tentokrát více).

Hned, jak jsem přeletěl lesy, mi něco nepřišlo úplně v pořádku. Žádný drak se totiž nikdy ve svém vyprávění nezmínil o dlouhých černých liánách vedoucích mezi roztodivnými stromy s mnohými tenkými kmeny. Raději jsem je nadletěl.

Jakmile jsem uviděl první lidské osídlení, vlétl jsem do něj jako bouře. Tedy, za pár desítek let už budu dost velký, abych tam vletěl jako bouře. Nicméně jsem způsobil nemalé pozdvižení. Několik lidí sedících u stolu venku všechno převrhlo a dalo se na zmatený únik do domu, jedna ženská zavřeštěla „Zavolejte policii!“ (kdo je to k čertu ta policie?) a mladý pár jdoucí po ulici se pokusil vzít přede mnou nohy na ramena.

Rozhodl jsem se dohonit prchající pár, chytl do svých spárů mladíka a pak ho shodil na zem, aby mi neutekl. Jekot ostatních lidí nabíral na intenzitě.

„Kde najdu krále?“ zařval jsem lidským jazykem.

Kluk měl v obličejí barvu vápence, chvíli vypadal, že strachy zapomněl mluvit. Poté, co jsem se pochlubil malým plamínkem, dokázal ze sebe vyloudit „Co . . . Cože? My nemáme krále.“

„Nelži! Kde přebývá princezna?“ Nenechám se přece oblafnout nějakým zbabělcem.

Mladík na mě ještě okamžik zíral a pak ukázal na sever. „Tam . . . Táhle. Velké město.“

Ještě jsem mu předvedl, že pro mě není problém zapálit celou vesnici, a rozletěl jsem se.

Než jsem dorazil k tomu městu, setmělo se. Lidé se odjakživa báli tmy, ale netušil jsem, že kvůli tomu rozsvěcují tolik světel. Dokonce i po cestách se pohybovaly zářivé body, asi už dávají louče i na své koně. Mě však víc zaujala zvláštní síť ulic.

22-5-3 Zrcadla 10 bodů

V téhle okrajové části města byly dost podivné cesty. Tvořily totiž rozlehlou čtvercovou síť, ale domy byly postaveny jen někde. V jednom místě se nacházel velmi silný světelný zdroj záhadného původu svítící pouze jedním směrem.

Vzpomněl jsem si, jak mi strýc vyprávěl o zrcadlech, a napadlo mě, jestli by se nedala využít spolu se zdrojem silného záření na osvětlení nějakého konkrétního domu.

Je tedy dána čtvercová síť o rozměrech $M \times N$, v níž se nachází K domů a jeden další, na který chceme z libovolné strany dosvítit. V jednom bodě máme světelný zdroj, který může svítit pouze vertikálně nebo horizontálně (ve smyslu čtvercové sítě), přičemž směr si můžeme vybrat.

Ptáme se, jestli lze do čtvercové sítě rozmístit na políčka zrcadla tak, aby byl jeden daný dům osvětlen, a pokud ano, kolik nejméně jich je potřeba. Domy jsou neprůsvitné a zrcadla umísťována do políček diagonálně (světlo se tedy šíří po čtvercové síti vždy jen horizontálně nebo vertikálně).

Pokud například máme čtvercovou síť o rozměrech 3×3 , světlo na souřadnicích $[2, 1]$, dům, jenž chceme osvítit, na $[2, 3]$ a další domy na $[1, 2]$ a $[2, 2]$, je správným řešením, že stačí umístit dvě zrcadla (na políčka $[3, 1]$ a $[3, 3]$).

Stačila chvíle a vlétl jsem přímo nad moře světel. A jak

byla některá silná! To musí být ale oheň, který dokáže takhle zářit.

A ta obydlí . . . Mnohdy byla velmi vysoká, až se mi nechtělo letět nad ně.

I když je noc, můžou mě takhle klidně zahlédnout, říkáal jsem si. Obzvlášť v takovém velkém množství, v jakém jsou dole na náměstí.

22-5-4 Davy lidí 12 bodů

Jak jsem se díval na stovky lidiček pod sebou, přišlo mi, že část věnuje pozornost soše a druhá část fontáně. Navíc spousta z nich měla za objektem svého zájmu jiného člověka tak, že socha či fontána ležela ve středu úsečky tvořené těmito lidmi.

Mě by zajímalo, jestli se dá dav N lidí, u nichž známe jejich souřadnice v rovině, rozdělit na dvě části, které jsou obě středově souměrné. Střed souměrnosti jedné části tvoří fontána a střed druhé socha, ale jejich souřadnice nejsou zadané. Někdy se čirou náhodou na fontáně či na soše může vyskytovat člověk. Z pohledu draka jsou všichni lidé stejné body, takže jejich rozměry zanedbejte.

Například pro 8 lidí se souřadnicemi $[6, 2]$, $[6, 4]$, $[1, 3]$, $[-4, -2]$, $[-4, 2]$, $[1, -3]$, $[6, -2]$, $[6, -4]$ rozdělení na dvě středově souměrné části existuje ($1., 3., 4., 5., 6.$ a $8.$ člověk v jedné části, $2.$ a $7.$ v druhé), ale 6 lidí a souřadnice $[4, 0]$, $[0, 4]$, $[0, 2]$, $[4, 4]$, $[2, 3]$, $[2, 0]$ už rozdělit nelze.

Let nad městem mě už začínal docela unavovat, když jsem konečně uviděl hrad, nebo alespoň něco jemu podobného. Každopádně jsem žádné lepší místo, kde hledat princeznu, v okolí neviděl.

S zuchnutím jsem přistál na dlažbě a protáhl si křídla, ve vzduchu jsem byl přeci jenom docela dlouho. Na nádvoří nikdo nebyl, takže jsem prošel branou na další. A tam jsem ji spatřil.

Seděla na lavičce sklopená nad něčím hnědým rozlámaným na kousky a tvářila se nešťastně. Na sobě měla dlouhý černý kabát, vysoké černé lesklé boty, což ladilo k jejím rozpuštěným vlasům barvy temné noci s jediným červeným pruhem.

Sice prý princezny běžně vypadají jinak, ale za 100 let se lidská móda může radikálně změnit. Popošel jsem blíž a oslovil ji.

„Milá princezno, mohu vám s něčím pomoci?“ zeptal jsem se, jak nejgalantněji jsem uměl.

V odpověď jsem dostal škytnutí a smutný pohled. Pak vstala, popošla pár kroků směrem ke mně, ale trochu se motala, takže se jí rozsypaly ty hnědé věci po zemi. Zjevně jí to však nevadilo.

„Potřebuju vyřešit jeden příklad,“ říkala ztěžka. „Na zítra do školy. Jinak ten matfyz neudělam.“

„A když ti pomůžu, poletíš na mých zádech ke mně domů?“

Podívala se na mě a zasmála se. „Jasně. Mimo chodem, husteje převlek.“

„Tak povídej.“

22-5-5 Čokolámání 10 bodů

Princezna dostala něco, čemu se říká čokoláda. Má to obdélníkový tvar a $M \times N$ dílků, které se dají lámat podle os mezi nimi. Ke každé této ose (horizontální i vertikální) měla napsané číslo, totiž cenu zlomu.

Její úkol spočíval v nalezení postupu, jak co nejrychleji zjistit, za jakou nejnižší cenu lze rozlámat čokoládu na jednotlivé dílky. Cena každého zlomu může být započítána vícekrát bez závislosti na délce zlomu. Například rozdělíme-li čokoládu na řádky a ty pak budeme lámat, započítá se cena každého vertikálního zlomu M krát, kdežto každého horizontálního jen jednou.

Tato úloha je praktická a řeší se ve vyhodnocovacím systému CodEx: <http://codex2.ms.mff.cuni.cz/ksp>. Pokud jste zatím žádnou praktickou úlohu neřešili, přečtěte si stručný úvod: <http://ksp.mff.cuni.cz/about/codex.html>.

Chvilíčku mi úloha zabrala, ale už jsem viděl mnohem těžší. Princeznu moje řešení zjevně nadchlo, vyskočila radostí a pak bez váhání vylezla na můj hřbet.

„Jakého království jsi ty vlastně princezna?“ osmělil jsem se zeptat, když přestala nadšeně vykřikovat nad úžasnou podívanou na noční Prahu, jak město nazvala.

„Já jsem princezna . . . princezna . . . matfyzu! A tohle celé město patří jenom nám! Podívej, támhle v těch vysokých zelených budovách sídlíme.“

Zadíval jsem se na novodobé zelené hrady a přemýšlel, jak radikálně se změnila architektura, když tu náhle se vpravo ozval hukot. Po pár sekundách i za mnou. A vlevo taky.

„Leť, ty můj draku, leť!“ křičela z plna hrdla moje princezna. Strach v jejím hlase jsem však nepostřehl.

Ohlédl jsem se a uviděl spoustu zvláštních ptáků bez křídel. Všichni vyluzovali monotónní hluk. Že by princezna měla až takovouhle ochranu proti drakům?

22-5-6 Hlídači princezny 13 bodů

Princezna je v království vždy velmi ceněna, a tak má spoustu bodyguardů, strážců a hlídačů. Kdyby se všichni kryli navzájem, vznikl by akorát zmatek, takže každý hlídač kryje právě jednoho jiného.

Do útoku proti nepříteli se vždy posílá co nejvíce hlídačů, ale každý z nich musí být kryt někým, kdo nejde do útoku. Jak najít takové hlídače?

Úlohu si můžete představit jako orientovaný graf, kde z každého vrcholu vede jen jedna hrana (do něj však může vést více hran, nebo žádná). Chceme najít největší množinu vrcholů takovou, že do každého vrcholu z této množiny vede alespoň jedna hrana z vrcholu mimo tuto množinu.

Pokud máme 5 hlídačů (očíslovaných od 1 do 5) a $1 \rightarrow$ (hlídá) $3, 2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 4, 4 \rightarrow 5$ a $5 \rightarrow 3$, pak vybereme do útoku hlídače 3 a 5.

„Vyzýváme vás, abyste okamžitě sletěl dolů, jinak bude zahájena varovná palba,“ ozvalo se silným, avšak podivně plochým hlasem zezadu.

„Vyprdni se na ně a ukaž jim, zač je toho loket!“ dodala mi odvalu moje princezna.

„Tak se pořádně drž!“

Prudce jsem slétl dolů. Přímou mezi domy. Neztrácel jsem čas obdivováním výšky zdejších budov a rozletěl se ulicí. Za mnou se však ozval svist hlídačů. Ihned jsem zabočil a uslyšel obrovskou ránu. Jednomu se manévr nepodařil.

Máchal jsem křídly jako nikdy v životě, jenže oni byli pořád za mnou. Drželi se jak klíšťata. Ještě jsem neslyšel, že by něco tak velkého dokázalo stíhat draka.

„Prásk! Prásk! Prásk!“ ozvalo se a já pocítil bolest na levém křídle. Provedl jsem bleskový úhyb.

„Kličkuj!“ zakřičela princezna zděšeně z hřbetu.

Nebylo třeba mě pobízet. O lučištnících jsem slyšel. Jenže tihle mají sakra rychlé šípy.

Rychle jsem zabočil do jedné úzké uličky. „Schovej se támhle,“ zařvala ihned. Neváhal jsem a vletěl do velkých otevřených vrat, až jsem se bouchl jedním křídlem. Po pár sekundách kolem s hukotem prolétlo pár princezniných strážců.

„Tak tady chvíli zůstaneme a pak rychle vyletíme.“

Byl jsem tak zadýchaný, že jsem jenom zakýval hlavou. Na vymýšlení lepšího plánu nebyl čas.

Po několika minutách odpočinku jsme se odvážili vyjít z úkrytu. Ihned jsem vyletěl, jak nevyšší to šlo. Naštěstí nás nezpозorovali, takže jsme se mohli v klidu vzdálit od města a tam si odpočinout. I ona toho měla dost, hned usnula pod mým ocasem splujícím peřinu.

Další den jsme už naštěstí bez nepříjemných příhod doletli domů. S princeznou jsem nyní velmi spokojen, je chytrá, akční a šikovná. Taková dračice . . .

22-5-7 ArcheoPaleoLingua 14 bodů

V této sérii si ještě jednou vyzkoušíme APL, programovací jazyk z dob našich prababiček, pradědečků a pralidí vůbec. K základním operacím a operátorům, které jsme si zavedli v úloze 22-4-7, doplníme pár dalších a naprogramujeme něco krapet složitějšího. A opět bez namáčení, . . . totiž bez cyklů.

Dyadický operátor *replikace* x/y dostane dva vektory stejné délky a vytvoří vektor, ve kterém se nejprve vyskytuje $x[0]$ kopií prvku $y[0]$, pak $x[1]$ kopií prvku $y[1]$, atd. Tedy například $3\ 0\ 2/4\ 5\ 6 \rightarrow 4\ 4\ 4\ 6\ 6$. Pokud se ve vektoru x vyskytují jen nuly a jedničky, replikace vlastně jen vybere ty prvky z y , na jejichž pozici se v x vyskytuje jednička, tedy provede jakousi *kompresi* vektoru y .

Inverzní operací k této kompresi je dyadický operátor *expanze* $x\backslash y$. Ten na vstupu potřebuje vektor x složený z nul a jedniček a vektor y , jehož délka je rovna počtu jedniček v x . Výsledkem je pak vektor vzniklý z x nahrazením každé jedničky odpovídajícím prvkem z y . Kupříkladu tedy platí $0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\backslash 4\ 5\ 6 \rightarrow 0\ 4\ 5\ 0\ 0\ 6$ a také $x/x\backslash y \rightarrow y$.

Konečně přidáme operátor *scanování* $f\backslash x$, kde f je dyadická operace a x vektor. Dá nám vektor, jehož i -tá složka je redukce f / prvních $i + 1$ složek vektoru x . Nechme raději hovořit příkladem: $+ \backslash 1\ 2\ 3 \rightarrow 1\ (1+2)\ (1+2+3) \rightarrow 1\ 3\ 6$.

A nyní slíbené úkoly:

Úkol 1 (5 bodů): Napište funkci, která najde všechna prvočísla menší než dané N .

Úkol 2 (4 body): Jak v APL uspořádat daný vektor čísel vzestupně? Slibujeme, že se žádné číslo nebude opakovat. (Zde prosíme používejte pouze podmnožinu APL, kterou jsme nadefinovali v našem seriálu. Operátory ∇ a Δ , jakkoliv krásné, se nepočítají.)

Úkol 3 (5 bodů): Je dán vektor nul a jedniček. Jak zjistit délku nejdelšího souvislého úseku tvořeného jedničkami?

Připomínáme, že u této úlohy na časové ani paměťové složitosti nezáleží, rozhodující je krátkost a elegance vašeho programu. Archeologii zdar.