

posledného intervalu v našom budovanom riešení. Naviac v našom špeciálnom prípade majú všetky intervaly rovnakú dĺžku, takže stačí usporiadať intervaly podľa začiatku (na vstupe však už máme pozície utriedené a v našej úlohe nemusíme triedenie vôbec riešiť).

Teraz už vieme zodpovedať otázku, či existuje riešenie s danou minimálnou vzdialenosťou. K čomu nám to poslúži? Treba si všimnúť, že ak existuje riešenie, ktoré má minimálnu vzdialenosť aspoň M . Potom existuje riešenie, ktoré má minimálnu vzdialenosť M' pre každé $M' \leq M$ (jednoducho ponecháme rovnakú množinu bodov). Inak povedané, existuje číslo M^* také, že pre všetky $M \leq M^*$ riešenie existuje a pre všetky $M > M^*$ riešenie neexistuje. A práve číslo M^* hľadáme. Teda riešenie by sme mohli nájsť tak, že ak máme rozsah súradníc bodov z nejakého intervalu R , potom vieme postupným skúšaním existencie riešenia, ktoré má minimálnu vzdialenosť $R, R-1, R-2, \dots$ nájsť číslo R^* v čase $\mathcal{O}(RM)$. Avšak z vlastnosti hľadaného čísla M^* môžeme použiť binárne vyhľadávanie na intervale R . Keď si pre medián prehľadávaného intervalu riešeni zistíme, či existuje riešenie a na základe toho sa vieme rozhodnúť, v ktorej polovici prehľadávaného intervalu leží číslo M^* .

Takto vieme nájsť maximálnu minimálnu vzdialenosť medzi dvojicou bodov a body, ktoré máme odstrániť, sú počiatky nevybratých intervalov pri riešení príslušného podproblému plánovania intervalov.

Celková časová zložitosť je $\mathcal{O}(N \log R)$, kde pri binárnom vyhľadávaní na intervale dĺžky R vieme v lineárnom čase overiť existenciu riešenia. Pamäťová zložitosť je $\mathcal{O}(N)$.

Peter Ondrúška

22-5-3 Zrcadla

Máme štvorcovú sieť a hľadáme v istém smyslu najkratšiu cestu, respektive cestu s co najmenším „zatáčkami“ tvořenými zrcadly. Že by prehľadávaní do šírky? Tak se podívejme, jak ho realizovat v tomto případě. Pokud jste ještě žádné prohledávání do šírky nikdy nepotkali, podívejte se do grafové kuchařky na našich stránkách.¹

Jak se dá čekat, ve frontě, již používá prohledávání do šířky, budou jednotlivá políčka čtvercové síť a každé se tam dostane maximálně jednou, fronta tedy může narůst do velikosti až $\mathcal{O}(M \times N)$. Vždy, když odebereme políčko z fronty, pustíme z něj světlo do všech čtyř směrů (do některých políček může přijít světlo z různých směrů přes stejný počet zrcadel a ukládat ho do fronty dvakrát se nevyplácí). Pro každý směr postupně procházíme políčka, dokud nenarazíme na překážející dům, a zařazujeme je do fronty, jestliže v ní ještě nebyly. Když narazíme na dům, jež chceme osvitit, vypíšeme počet zrcadel a skončíme. Vyprázdní-li se fronta a cíl je nedosažen, nejde na něj dosvítit.

Pro evidenci, kde se nacházejí překážky a přes kolik zrcadel došel algoritmus na konkrétní políčko, si zavedeme dvou-ozměrné pole o velikosti $M \times N$. Hodnota -3 na políčku i, j znamená, že je tam překážka, hodnota -2 , že do políčka ještě nedorazilo světlo, a hodnoty větší nebo rovné nule, přes kolik nejméně zrcadel se tam světlo dostane.

Proč toto řešení funguje? Stačí, když si všimneme, že políčka ve frontě jsou uspořádána dle minimálního počtu zrcadel, která musíme použít, aby se do nich dostalo světlo. Pokud jsme se na políčko A dostali nejprve z políčka B a

dostaneme-li se do něj později z jiného bodu, určitě k tomu použijeme nejméně tolik zrcadel jako z políčka B .

Jaká je časová složitost tohoto algoritmu? Každé políčko se sice objeví ve frontě maximálně jednou, ale světlo se z něj může dostat až do $\mathcal{O}(M + N)$ dalších políček. Navíc na každé políčko může doletět světlo až z $\mathcal{O}(M + N)$ jiných, celkově tedy vyjde ne moc pěkná složitost $\mathcal{O}(MN(M + N))$.

Jak algoritmus zrychlí? Hlavní problém, proč algoritmus pracuje v nejhorším případě tak pomalu, je, že se na některá políčka podíváme až $\mathcal{O}(M + N)$ -krát, avšak do fronty je zařadíme jen jednou. Přitom je zbytečné se na ně dívat ze stejného směru vícekrát (např. z políčka, jež je nad ním, pak z toho, co je o 2 nad ním...). Proto si budeme u každého políčka navíc ukládat, jakými směry už jím letělo světlo.

Můžete si všimnout, že stačí ukládat pouze dva bity informace: jestli políčkem letělo světlo horizontálním směrem a jestli vertikálním směrem. Pokud totiž poletí světlo z políčka v souvislém úseku bez překážek na nějakém řádku či sloupci, tak ho proletí celý bez ohledu na to, odkud se naposledy mohlo odrazit.

S tímto vylepšením se po vytažení políčka z fronty podíváme, jestli už jím proletělo světlo horizontálním i vertikálním směrem a případně projdeme políčka tím či oním směrem (oběma zároveň určitě ne kromě zdroje, jelikož světlo muselo do políčka nějakým směrem doputovat). Díky vlastnostem prohledávání do šířky (políčka jsou ve frontě seřazena dle počtu zrcadel, přes které se do nich dostalo světlo) jsme si touto úpravou určitě nepokazili řešení.

Nyní už do každého políčka doputuje světlo nejvýše dvakrát, takže časová složitost vyjde $\mathcal{O}(MN)$. V nejhorším případě stejně projdeme skoro celou štvorcovou síť a ostatně i velikost vstupu je nejvýše $\mathcal{O}(MN)$ (bude-li řádově tolik překážek), takže asymptoticky lepší algoritmus vymyslíme jen těžko, pomineme-li nějaké heuristiky (triky, které v určitých případech zrychlí program), jež však obecně nefungují.

Pavel „Paulie“ Veselý

22-5-4 Davy lidí

Úloha byla věru těžká. Vyřešíme tedy nejdříve několik podproblémů a z nich pak složíme celé řešení. Výklad okořeníme tímto značením: jsou-li A a S body v rovině, pak A^S značí obraz bodu A ve středové souměrnosti se středem S .

1. Je množina bodů symetrická podle zadaného středu S ? To můžeme zjistit snadno: uložíme body množiny do nějaké datové struktury (třeba do vyhledávacího stromu). Pak je budeme postupně procházet body a pro každý bod A se podíváme, je-li ve struktuře i bod A^S . Pokud ano, oba smažeme a pokračujeme dál. To pro n bodů zvládneme v čase $\mathcal{O}(n \log n)$.

Můžeme to provést i jednodušeji: Setřídíme body lexikograficky (tzn. nejdříve podle x -ové souřadnice a kde je x stejné, tam podle y) a všimneme si, že pokud je bod A lexikograficky před B , pak je B^S lexikograficky před A^S . Jinými slovy v setříděném pořadí platí, že obraz prvního bodu je poslední bod, obraz druhého předposlední a tak dále. Tříděním strávíme čas $\mathcal{O}(n \log n)$, kontrolou pak $\mathcal{O}(n)$. To je výhodnější v případě, že chceme postupně vyzkoušet několik různých kandidátů na střed S .

2. Je množina bodů symetrická? To bude snadné – pokud

```

struct pt F = stred(B[j], B[k]);
pary(F, Fp);

// Kontrolujeme cesty v grafu, není-li nějaká sudá
for (int p=0; p<N; p++)
  if (Sp[p] < 0 || Fp[p] < 0)
  {
    int q = p;
    int odkud = -1;
    int kroku = -1;
    do
    {
      if (Sp[q] != odkud) odkud=q, q=Sp[q];
      else odkud=q, q=Fp[q];
      kroku++;
    }
    while (q >= 0);
    if (!(kroku%2))
      goto spatne;
  }

  printf("S=(%d,%d) F=(%d,%d)\n", S.x/2, S.y/2,
        F.x/2, F.y/2);

  return 0;
  spatne; ;
}

printf("Není souměrné. Tot' na draka, milý draku.\n");
return 0;
}

```

22-5-5 Cokolámání

```

#include <stdlib.h>
#include <stdio.h>
#include <limits.h>

int compare (const void *a, const void *b)
{ return ( *(int*)a - *(int*)b ); }

int main(void)
{
  FILE *input = fopen("cokolada.in", "r");
  int M, N;
  fscanf(input, "%d", &M);
  fscanf(input, "%d", &N);
  int *rows = malloc(sizeof(int) * (M - 1));
  for (int i = 0; i < M - 1; i++)
    fscanf(input, "%d", &rows[i]);
  int *cols = malloc(sizeof(int) * (N - 1));
  for (int i = 0; i < N - 1; i++)
    fscanf(input, "%d", &cols[i]);
  fclose(input);

  qsort(rows, M-1, sizeof(int), compare);
  qsort(cols, N-1, sizeof(int), compare);
  int rowsI = M - 2;
  int colsI = N - 2;
  int colsCoeF = 1;
  int rowsCoeF = 1;
  int result = 0;

  // v každém kroku zpracujeme největší ještě nezpracovaný
  // zlom z obou (teď už) setříděných polí
  while (rowsI != -1 || colsI != -1)
  {
    if (rowsI != -1 &&
        (colsI == -1 || rows[rowsI] > cols[colsI])) {
      result += rows[rowsI] * rowsCoeF;
      rowsI--;
      colsCoeF++;
    } else {
      result += cols[colsI] * colsCoeF;
      colsI--;
      rowsCoeF++;
    }
  }

  FILE *output = fopen("cena.out", "w");
  fprintf(output, "%d", result);
}

```

```

fclose(output);
return 0;
}

22-5-6 Hlídači princezny C

#include <stdio.h>
#include <stdbool.h>

struct vrchol_t {
  int kryje; // Koho kryje
  int pokryti; // Kolik ho kryje
  bool pouzity; // Už jsme ho zpracovali?
};

int main(int argc, char *argv[] ) {
  // Napřed krapet načítání
  int pocet;
  scanf("%d", &pocet);
  struct vrchol_t vrcholy[pocet];
  for(int i = 0; i < pocet; ++ i) {
    int kryje;
    scanf("%d", &kryje);
    vrcholy[i] = (struct vrchol_t) {
      .kryje = kryje - 1 // C číslu je od 0
    };
  }
  // Předpočítat vstupní stupně a roztrždit do hromádek
  for(int i = 0; i < pocet; ++ i)
    ++ vrcholy[vrcholy[i].kryje].pokryti;
  int nekrytych = 0, nekryti[pocet];
  for(int i = 0; i < pocet; ++ i)
    if(vrcholy[i].pokryti == 0)
      nekryti[nekrytych++] = i;
  // Nyní, dokud nedojdou vrcholy, tak hurá na věc
  while(pocet) {
    // Vybereme ze správné hromádky - předně z nekrytých
    int aktualni = nekrytych ? nekryti[-- nekrytych]
      : -- pocet;
    if(vrcholy[aktualni].pouzity) // Toho už známe, jiného
      continue;
    // Tento do zálohy
    vrcholy[aktualni].pouzity = true;
    // Vezmeme toho, koho kryje
    int kryty = vrcholy[aktualni].kryje;
    if(vrcholy[kryty].pouzity)
      // Někdy už jsme ho zpracovali, nezpracovávat znovu
      continue;
    // Poslat do útoku
    printf("%d\n", kryty + 1);
    vrcholy[kryty].pouzity = true;
    // Odešit od toho, koho kryje útočící, když je nekrytý,
    // šup do hromádky
    if(-- vrcholy[vrcholy[kryty].kryje].pokryti == 0)
      nekryti[nekrytych++] = vrcholy[kryty].kryje;
  }
  return 0;
}

22-5-6 Hlídači princezny Perl

use common::sense;
use less 'CPU';

$_ = "\n";
<>; my @covers = <>; chomp @covers;
$_ -- foreach(@covers);
my @vertices = map
+{ covers => $covers[$_], deg => 0, idx => $_ },
(0..$#covers);
$vertices[$_] += deg foreach(@covers);
my @zeroes = grep !$_->{deg}, @vertices;
my @all = @vertices;
while(my $uncovered = shift @zeroes // shift @all) {
  next if $uncovered->{used};
  my $covered = $vertices[$uncovered->{covers}];
  next if $covered->{used};
  print $covered->{idx} + 1;
  $uncovered->{used} = $covered->{used} = 1;
  my $next = $vertices[$covered->{covers}];
  push @zeroes, $next unless -- $next->{deg};
}

```

¹ Kuchařka o grafech: <http://ksp.mff.cuni.cz/tasks/20/cook3.html>

```
//dokud nenarazí na překážku
void projdi(int x, int y, int dx, int dy) {
    int i = 1, nx = x + i * dx, ny = y + i * dy;
    while (nx > 0 && ny > 0 && nx <= M && ny <= N
        && sit[nx][ny] != PREKAZKA) {
        //políčko [nx, ny] ještě nebylo dosaženo
        if (sit[nx][ny] == NEDOSAZENO) {
            //je třeba o 1 zrcadlo více
            sit[nx][ny] = sit[x][y] + 1;
            //zařad políčko do fronty
            frontaX[frKon] = nx;
            frontaY[frKon++] = ny;
        }
        //políčkem už prošlo světlo horizontálně
        if (dx != 0) smery[nx][ny] += 1;
        //nebo vertikálně
        else if (dy != 0) smery[nx][ny] += 2;

        //posuň se dále
        i++; nx = x + i * dx; ny = y + i * dy;
    }
}
```

```
int main(void) {
    scanf("%d %d %d", &M, &N, &K);
    scanf("%d %d", &startX, &startY);
    scanf("%d %d", &cilX, &cilY);

    //inicializace
    for (int i = 1; i <= M; i++)
        for (int j = 1; j <= N; j++) {
            smery[i][j] = 0;
            sit[i][j] = NEDOSAZENO;
        }
    //načti překážky a přidej je do sítě
    int a, b;
    for (int i = 0; i < K; i++) {
        scanf("%d %d", &a, &b);
        sit[a][b] = PREKAZKA;
    }
    //inicializace fronty
    frStart = 0; frKon = 1;
    frontaX[0] = startX;
    frontaY[0] = startY;

    sit[startX][startY] = -1;

    int x, y;
    //dokud je ve frontě ještě nějaký prvek
    //a cíl nedosažen
    while (frStart < frKon && sit[cilX][cilY]
        == NEDOSAZENO) {
        //vytáhni políčko z fronty
        x = frontaX[frStart];
        y = frontaY[frStart++];

        //neletělo-li políčkem světlo horizontálně
        if ((smery[x][y] & 1u) == 0) {
            //projdi políčka od něj vlevo i vpravo
            projdi(x, y, 1, 0);
            projdi(x, y, -1, 0);
        }
        //to samé pro vertikální směr
        if ((smery[x][y] & 2u) == 0) {
            projdi(x, y, 0, 1);
            projdi(x, y, 0, -1);
        }
        //světlo letělo z tohoto políčka všemi směry
        smery[x][y] = 3;
    }

    if (sit[cilX][cilY] == NEDOSAZENO) {
        printf("Cílové políčko je nedosažitelné.\n");
    }
    else {
        printf("Je třeba umístit %d zrcadel.\n",
            sit[cilX][cilY]);
    }
    return 0;
}
```

```
22-5-4 Davy lidí C
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>

struct pt { int x, y; }; // Bod

#define MAX 10000
struct pt B[MAX]; // Zadané body
int N;
int Sp[MAX], Fp[MAX]; // Do páru podle S/F nebo -1

int lex_cmp(const void *A, const void *B)
{
    // Lexikografické porovnání dvou bodů
    const struct pt *a=A, *b=B;
    if (a->x < b->x) return -1;
    if (a->x > b->x) return 1;
    if (a->y < b->y) return -1;
    if (a->y > b->y) return 1;
    return 0;
}

struct pt stred(struct pt A, struct pt B)
{
    // Střed úsečky
    return (struct pt) { (A.x+B.x)/2, (A.y+B.y)/2 };
}

struct pt obraz(struct pt A, struct pt S)
{
    // Obraz bodu A podle středu S
    return (struct pt) { 2*S.x - A.x, 2*S.y - A.y };
}

void pary(struct pt S, int *Sp)
{
    // Najde všechny páry (hrany) podle středu S
    int i=0, j=N-1;

    while (i <= j)
    {
        struct pt O = obraz(B[i], S); // Obraz bodu B[i]
        int c = lex_cmp(&O, &B[j]); // porovnáme s B[j]
        if (!c)
        {
            Sp[i] = j, Sp[j] = i; // trefa => pár
            i++, j--;
        }
        else if (c < 0) // B[j] se už nikdy nespáruje
            Sp[j--] = -1;
        else // B[i] se už nikdy nespáruje
            Sp[i++] = -1;
    }
}

int main(void)
{
    while (scanf("%d%d", &B[N].x, &B[N].y) == 2)
    {
        // Finta: vynásobíme souřadnice dvěma, takže
        // středy všech úseček vyjdou celočíselně.
        B[N].x *= 2, B[N].y *= 2;
        N++;
    }
    qsort(B, N, sizeof(B[0]), lex_cmp);

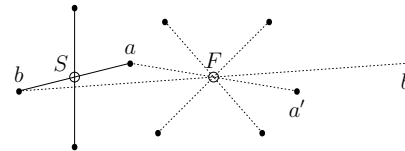
    for (int i=0; i<N; i++)
    {
        // Zkoušíme všechny polohy sochy
        struct pt S = stred(B[0], B[i]);
        pary(S, Sp);

        // Najdeme nespárovaný bod (nejsou-li, vyjde j=N-1)
        int j = 0;
        while (j < N-1 && Sp[j] >= 0)
            j++;

        for (int k=0; k<N; k++)
        {
            // Zkoušíme možné polohy fontány
```

je množina symetrická, musí její těžiště ležet ve středu symetrie. Stačí tedy spočítat těžiště (jeho x -ová souřadnice je průměrem x -ových souřadnic všech bodů a podobně y -ová souřadnice) a spustit na něj předchozí algoritmus.

3. Známe polohu sochy S a fontány F , lze body rozdělit na část souměrnou podle S a část souměrnou podle F ? Zde naprostá většina řešitelů zkusila hladový algoritmus – testovat už známým způsobem souměrnost podle S , body, které souměrné nejsou, si dávat stranou a nakonec vyzkoušet, jestli jsou souměrné podle F . To ale bohužel nefunguje, elá hop, protipříklad z klobouku ven:



Body a, b se účastní dvou symetrií – jednak spolu podle S , jednak s, a', b' podle F . Pokud tedy při zkoumání středu S body a, b spárujeme, zbudou pak a' a b' na ocet. Kdybychom je ovšem odložili oba stranou, spárovali bychom následně podle středu F dvojice $a-a'$ a $b-b'$. (Zde by samozřejmě pomohlo zkoumat nejdřív F a pak S ; takový algoritmus ale nachtáváme, pakliže k našemu protipříkladu přidáme ještě jeho kopii překlopenou podle osy úsečky SF .)

Jak z téhle arcipatálie ven? Inu, za vším hledej grafy... body prohlásíme za vrcholy, dvojice symetrické podle S spojíme jedním typem hran (na obrázku plně čáry), dvojice symetrické podle F druhým (na obrázku tečkovaně). V tomto grafu chceme najít *perfektní párování*, čili rozdělit vrcholy na dvojice tak, aby každá dvojice byla spojená hranou.

Žádný problém, každý matfyzák ví už od narození, že na hledání perfektního párování tu je Edmondsov „zahradní“ algoritmus. My ale tak mocné kouzlo ani nebudeme potřebovat. Místo toho si zkusíme představit, jak náš graf vypadá. Kterýkoliv vrchol může sousedit s nejvýše jednou hranou prvního druhu a nejvýše jednou druhého. Stupeň vrcholu tedy může být buď 0, nebo 1, nebo 2 a pokud je 2, jsou obě hrany různých druhů. To nám nedává moc možností – každá komponenta souvislosti musí být buďto izolovaný vrchol nebo cesta, případně kružnice. Na cestě i na kružnici se navíc musejí střídát hrany obou druhů, takže ihned víme, že kružnice mají sudou délku a tím pádem si na nich stačí vybrat buď jeden nebo druhý druh hran a je spárováno. Cesty o sudém počtu hran a izolované vrcholy (to jsou vlastně cesty o nula hranách) spárovat určitě nejdou. Na cestě o lichém počtu hran stačí použít ten typ hrany, kterým cesta začíná i končí.

K vyřešení tohoto podproblému tedy postačí sestavit mocný graf (třeba dvojitým spuštěním algoritmu 1.), rozložit ho na komponenty souvislosti a ověřit, jestli se mezi nimi nevyskytne sudá cesta. To vše zvládneme v čase $\mathcal{O}(n)$, pokud už máme všechny body setříděné lexikograficky.

4. Polohy S, F neznáme. Co teď? Budeme pokorně zkoušet všechny kandidáty na polohu sochy a fontány a spouštět pro ně předchozí ověřovací algoritmus. Není jich nekonečně mnoho? Ne ne, střed přeci musí ležet buďto v nějakém zadaném bodě nebo ve středu úsečky určené dvěma zadanými body. Takových míst je $\mathcal{O}(n^2)$, takže dvojic kandidátů na S, F je $\mathcal{O}(n^4)$, ověřováním každé strávíme $\mathcal{O}(n)$. Celková časová složitost je tedy $\mathcal{O}(n \log n + n^5) = \mathcal{O}(n^5)$, paměti nám stačí lineární.

5. Zrychlujeme. Jak se zbavit oblundné páté mocniny, jež nám škodolibým chcutotem kazí radost z vítězství? Trochu množinu kandidátů na středy omezíme. Předně – zvolíme si nějaký pevný bod A a prohlásíme, že socha je to, podle čeho je tento bod souměrný. Stačí tedy při hledání poloh sochy vyzkoušet jen středy úseček, kterých se bod A účastní. Pro každou polohu sochy pak nalezneme nějaký bod, který podle ní není s ničím symetrický (kdyby žádný takový nebyl, už jsme úlohu vyřešili). Tento bod jistě patří do druhé množiny, takže fontána se vyskytuje na nějaké úsečce vedoucí z tohoto bodu. Celkem tedy $\mathcal{O}(n)$ možností pro sochu, $\mathcal{O}(n)$ pro fontánu a čas $\mathcal{O}(n)$ na ověření. To dává dohromady $\mathcal{O}(n \log n + n^3) = \mathcal{O}(n^3)$ s lineární pamětí. Umíte to lépe? My zatím ne.

opravila Jitka Novotná, řešení sepsal Martin Mareš

22-5-5 Čokolámání

Předtím, než určíme, kolik vlastně rozlámání celé čokolády nejméně stojí, musíme vymyslet, jak takové rozlámání provést. Velice jednoduché řešení je jít na čokoládu „hladově“. Vzhledem k tomu, že zlomy, které provedeme dříve, se započítají méněkrát než ty, co provedeme později, tak čokoládu rozlomíme vždy podle nejdražšího zatím nepoužitého zlomu. Pokud zlom prochází přes víc kusů čokolády, rozlomíme každý z nich. Jenže takovýhle jednoduchý postup přece nemůže fungovat, ne? Ukazuje se, že může, jenom to musíme dokázat.

Nějaký konkrétní postup rozlámání si můžeme představit dvěma způsoby: buď jako binární strom, kde každý vrchol je kus čokolády, synové vrcholu jsou ty kusy, které z něj vzniknou jedním rozlomením a listy jsou kusy, které už nejdou rozlomit (tzn. velikosti 1×1). Druhrou reprezentací postupu rozlámání je posloupnost zlomů, ve které se každý zlom vyskytuje právě jednou.

Převedení posloupnosti zlomů na strom je jednoduché: láme čokoládu podle zlomů v posloupnosti a všimáme si, které kusy jsme rozlomili na jaké. Opačný směr je ovšem složitější: posloupnost zlomů určíme ze stromu tak, že rekurzivně vypočítáme posloupnosti zlomů podstromů synů kořene, ty spojíme a na začátek ještě přidáme zlom z kořene. Spojení je definované tak, že obě posloupnosti musí být podposloupnostmi (ne nutně souvislými) výsledku s tím, že se v něm žádný zlom nesmí opakovat, ale na druhou stranu můžeme změnit pořadí v rámci souvislých skupin zadaných posloupností, které obsahují pouze zlomy jedné orientace. Když vodorovné zlomy budu značit písmeny a svislé číslly, tak například posloupnosti DCA1B a C3ABD přeuspořádám na CAD1B a C3ADB a výsledkem je C3AD1B, posloupnosti A1B a B3A spojit nejdou a strom, který obsahuje takové podstromy nejde reprezentovat jako posloupnost zlomů. Když postup rozlámání reprezentovaný stromem převedu na posloupnost zlomů a pak zpět na strom, výsledkem může být jiný strom. Jejich ceny ale budou stejné, protože jsme jenom změnili pořadí v rámci skupin zlomů se stejnou orientací. (Když lámu zleva do prava, tak výsledek má stejnou cenu, jako když lámu zprava do leva. Když ale nejdřív lámu vodorovně a pak svisle, tak výsledek může mít různou cenu, než když lámu v opačném pořadí.)

Náš postup rozlámání se reprezentuje jako posloupnost zlomů jednoduše: jsou to všechny zlomy setříděné od nejdražšího. Nyní potřebujeme dokázat, že tato posloupnost zlomů

je nejlevnější možná a také, že žádný postup rozlámání, který se nedá vyjádřit jako posloupnost zlomů nejlevnější být nemůže.

Všimneme si, že jakoukoliv posloupnost můžeme setřídít tak, že vezmeme prvek s nevyšší hodnotou a přesuneme jej na první místo, pak vezmeme prvek s druhou nejvyšší hodnotou a dáme ho na druhé místo a tak dále. Při každém takovém přesunutí prvek přeskakujeme jen prvky, které mají menší hodnotu, než on sám. Pokud jsou prvky posloupnosti zlomy, tak platí, že přeskočení zlomu, který má stejnou orientaci cenu nezmění. Na druhou stranu přeskočení zlomu s opačnou orientací způsobí, že počet výskytnů přeskakujícího zlomu ve stromové reprezentaci se zmenší o jedna, naopak počet výskytnů přeskakovaného zlomu se o jedna zvýší. A protože počet výskytnů ve stromě odpovídá tomu, kolikrát se zlom započítá do výsledné ceny, určité jsme takovými setříděním posloupnosti zlomů její cenu nevyšší. Jako výsledek jsme dostali naši posloupnost, ta je tedy určitě nejlevnější.

To, že postup rozlámání, který nejde reprezentovat posloupností zlomů nemůže být nejlevnější, dokážeme tak, že si ve stromě, který reprezentuje takovýto postup, najdeme vrchol, jehož podstrom reprezentuje posloupností nejde, ale podstromy obou jeho synů jdou (takový určitě existuje). Alespoň jedna z posloupností synů není setříděná od nejdražšího (kdyby obě byly, tak jdou spojit) a navíc se ani nedá setřídít přehazováním v rámci souvislých skupin se stejnou orientací. To znamená, že tam buď existuje dvojice po sobě jdoucích zlomů s opačnou orientací, jejíž první prvek má menší cenu, nebo se taková dvojice dá vytvořit přehazováním ve skupině se stejnou orientací. Když tuto dvojici prohodím, zmenším tím cenu rozlámání a tento postup tedy nemohl být nejlevnější.

Dokázali jsme tedy, že náš postup je nejlevnější, teď už zbývá jenom vymyslet, jak spočítat tuto cenu. Stačí si uvědomit, že každý zlom v posloupnosti se započítá o jedna víckrát, než kolik je před ním zlomů s opačnou orientací. Algoritmus bude postupovat tak, že si všechny zlomy setřídí podle ceny a postupně je od nejdražšího započítává, každý tolikrát, kolik zlomů podle opačné osy než má aktuální zlom jsme už započítali. Pokud má čokoláda rozměry $M \times N$, tak časová složitost je $\mathcal{O}((N+M)\log(N+M))$ a paměťová $\mathcal{O}(N+M)$.

Poznámka: Setřídění zlomů podle ceny jsme docela odbyli, jaký třídící algoritmus je nejlepší? Vzhledem k tomu, že tato úloha je praktická, tak odpověď je velice jednoduchá: obvykle ten, který programovací jazyk, který používáme, sám obsahuje. Třeba v Cěku je to `qsort()`, v C# `Array.Sort()`.

Petr Onderka

22-5-6 Hlídači princezny

Začneme, jako každý líný člověk, od toho nejjednoduššího. Představme si, že máme hlídače, řekněme A , kterého nekryje vůbec nikdo. Ten určitě do útoku jít nemůže. Tak tam ale do útoku pošleme hlídače B , který je kryt hlídačem A (pokud již v útoku není). Oba ze vstupu odstraníme, protože jsou již vyřešení a pokračujeme s menší úlohou stejného druhu.

Co ale v případě, že žádného nekrytého nemáme? Pak si všimneme, že takový graf musí být několik neproponených orientovaných cyklů. Vezmeme tedy každý z cyklů zvlášť (můžeme, neovlivníjijí se). Když je cyklus sudé délky, pak

dokážeme poslat do útoku právě polovinu z jeho hlídačů (každého druhého) – lépe to zřejmě nejde, za každého v útoku musí být alespoň jeden, který kryje. A u lichého? Tam nám, bohužel, jeden zbude, ale at párujeme jakkoliv, jeden zbýt musí, tedy to také nejde lépe.

Že mi ještě nevěříte? No, tak malinko důkazů. Napřed si dokážeme, že pokud v grafu není žádný vrchol vstupního stupně 0 a všechny mají výstupní stupeň 1, pak se jedná o cykly. Vyberme si libovolný vrchol. Z něho vede právě jedna hrana ven. Vydejme se po ní a dojdeme do dalšího. A tak dále. Jednou musíme potkat vrchol, ve kterém jsme již byli. A proč je to ten první? Kdyby nebyl, tak do toho, který jsme potkali podruhé vedou alespoň dvě různé hrany (jedna, po které jsme přišli poprvé a druhá, kterou jsme přišli teď). Protože ale z každého vrcholu vychází právě jedna hrana, průměrně do každého musí také vstupovat jedna. A neexistuje vrchol, který by měl méně než jednu vstupní hranu, nemůže tedy existovat ani takový, který má více než jednu.

A nyní to tvrzení hned na začátku. Proč můžeme vzít hlídače B ? Hledáme nejmenší protipříklad – vstup s nejmenším počtem hlídačů, kde náš program vybere špatné řešení. Hlídače B jsme vybrali a zkazili jsme to tím – to ale znamená, že byl potřeba v záloze na krytí hlídače C .

No dobrá, ale tím, že místo C vezmeme B , si přeci neuškodíme. Hlídačů máme stejně a po nasazení B nám v grafu zbude jeden vrchol navíc (což nám, zřejmě, neuškodí, protože ho můžeme jednoduše nevyužít).

To je celé hrozně hezké, víme, že to funguje. Jak to ale napsat? A to ještě tak, aby to běželo rychle? Samozřejmě, mohli bychom pokoušet projít celý vstup, pokoušet se najít vrchol stupně 0, ale to by trvalo dlouho. Proto je na to potřeba jít chytřejí.

Předpočítáme si, hned na začátku, vstupní stupeň každého vrcholu. Poté si rozházíme vrcholy na dvě hromádky – v jedné budou ti nekrytí a v druhé ti ostatní.

Potom zkusíme vzít vždy jednoho nekrytého. Toho dáme do zálohy (to je náš A). Pokud je ten, kterého kryje, ještě nezpracovaný, nasadíme ho do útoku (to je B). A tomu, kterého kryje B , odečteme jedničku od vstupního stupně, pokud mu klesne na nulu, přehodíme z jedné hromádky do druhé. Celý tento jeden krok lze stihnout v konstantním čase.

Jakmile není na nekrytých hromádce nikdo, máme cykly. Je jedno, od kterého začneme cyklus „rozmotávat“, tak si prostě jeden vrchol vezmeme a uděláme s ním to samé – řekněme, že je v záloze, toho, koho kryje, pošleme do útoku. Tím nám vznikne nekrytý hlídač (pokud měl cyklus délku alespoň 3) a pokračujeme dál obvyklým způsobem.

Dále, hromádka krytých hlídačů může být čistě virtuální – ve chvíli, kdy z ní odebíráme, tak je totožná se všemi ještě nepoužitými. A nepouzitelnost si můžeme značit přímo v hlídači a pamatovat si, kde jsme naposledy skončili s vyhledáváním.

Celkově nám z toho tedy vychází pěkná lineární složitost časová a stejně tak paměťová.

Michal „vornér“ Vaner

22-5-7 ArcheoPaleoLingua

Úkol 1: Prvočísla můžeme hledat například takto:

```
p N : (2=+/~Z° .|Z)/Z+1+~N.
```

Jak toto kouzlo funguje? Nejprve si do proměnné Z uložíme čísla od 1 do N . Pak pomocí vnějšího součinu Z° .|Z vytvoříme tabulku všech zbytků po dělení a operátorem \sim ji znegujeme – výsledkem je tedy matice, která má na pozici i, j jedničku právě tehdy, když je číslo j dělitelné číslem i , jinak nulu. Redukcí $+/$ z toho vytvoříme vektor, jehož j -tá složka udává počet dělitelů čísla j . Ten následně porovnáme s dvojkou a dostaneme vektor, jehož j -tá složka je 1 právě tehdy, je-li j prvočíslo. Pak už stačí použít operátor komprese, abychom z vektoru Z získali seznam prvočísel.

Úkol 2: Úlohu si rozdělíme na dvě části: nejprve zjistíme, v jakém pořadí se prvky mají nacházet, a pak je do něj přeházíme. Pořadí popíšeme permutací p , což bude vektor, jehož i -tý prvek bude říkat, na jakém místě se má objevit $x[i]$.

Hledanou permutaci sestojíme takto: vezmeme direktní součin $x^{\circ}.\langle x$. Ten nám vytvoří matici nul a jedniček, jejíž i -tý sloupec prozradí, které prvky jsou menší než $x[i]$. Jejich počet (zjistíme redukcí) je samozřejmě roven místu, na kterém se má $x[i]$ ocitnout.

Asi nejjednodušší způsob, indexovat vektorem, a co víc, do takto indexovaného vektoru lze i přiřadit. Stačí tedy použít $x[p]+x$ a je prohozeno. Celý program vypadá takto:

```
x[+/ $x^{\circ}.\langle x$ ]+x.
```

Úkol 3: I zde, tentokrát inspirování řešením Jirky Eichlera, přidáme jeden rozměr. Vytvoříme matici, která bude mít

| Vzorové programy | |
|--|---|
| 22-5-2 Stráže údolí | C++ |
| <pre>#include <stdio> int N, K; // pozície bodov na vstupe int pozicie[1000047]; // otestovat, či existuje riešenie // s minimálnou vzdialenosťou aspoň M bool existuje(int M, bool print) { int posledny = 0, vyhodene = 0; for (int i = 0; i < N; i++) { // ak sa dá pridať do riešenia, pridať if (posledny <= pozicie[i]+M) { posledny = pozicie[i]+M; } else { // inak preskočiť if (print) printf("%d\n", i+1); vyhodene++; } } // späť riešenie kritérium ? return vyhodene <= K; } int main() { // načítať vstup scanf("%d %d", &N, &K); for (int i = 1; i < N; i++) { scanf("%d", &pozicie[i]); // prepočítat pozíciu bodu pozicie[i] += pozicie[i-1]; } // binárne nájst riešenie na intervale int down = 0, up = pozicie[N-1]+1; while (up > down+1) { int median = (up+down)/2; // ak existuje riešenie pre medián, // potom riešenie je väčšie rovné if (existuje(median,false))</pre> | <pre>down = median; else // inak menšie up = median; } printf("Najmensia medzera je: %d\n", down); printf("Treba odstranit vrany:\n"); existuje(down,true); return 0; }</pre> |
| 22-5-3 Zrcadlo | C |
| <pre>#include <stdlib.h> #include <stdio.h> #define MAXMN 1000 #define MAXK 10000 //konstanty pro překážku na poličku #define PREKAZKA -3 //a nedosažené políčko #define NEDOSAZENO -2 //rozměry M x N, počet překážek, zdroj a cíl int M, N, K, startX, startY, cilX, cilY; //pole udávající, přes kolik zrcadel se světlo //dostane na poličko (-2 = ještě se tam nedostalo, //-3 = překážka int sit[MAXMN][MAXMN]; //pole, udávající, jestli světo letělo poličkem //horizontálním či vertikálním směrem //0 = žádným směrem, 1 = jen horizontálně, //2 = jen vertikálně, 3 = letělo oběma směry) int smery[MAXMN][MAXMN]; //fronta na prohledávání do šířky //pro přehlednost používám 2 pole, polička se ale //dají kódovat jako (y - 1) * M + x do jednoho) int frontaX[MAXMN * MAXMN], frontaY[MAXMN * MAXMN]; int frStart, frKon; //projde polička od [x, y] ve směru (dx, dy)</pre> | |

Martin Mareš